



حسابان ۱



فصل ۱ : چپر و معادله

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n از رابطه روبرو به دست می‌آید:
مثال کتاب: روی محیط دایره ای ۲۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به دست آورید.

answer



مجموع n جمله اول دنباله حسابی

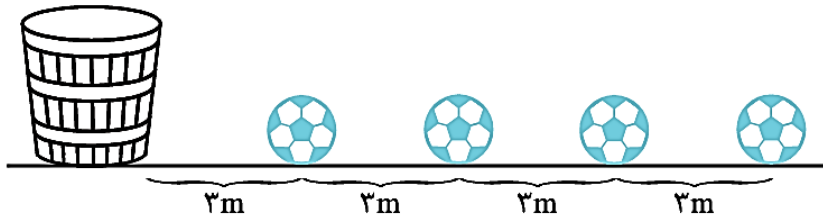
$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

مثال: (کار در کلاس) مجموع همه اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را بیابید.

مثال: (مثال کتاب) در یک مسابقه، تعداد بسیاری توپ روی فط مستقیم و هر یک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است. دهنده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده، توپ اول را بردارد آن را تا سبد عمل کند و به سبد بیندازد. سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دهنده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد، حساب کنید چقدر توپ در سبد انداخته است.



answer

مجموع n جمله اول دنباله هندسی



$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i \rightarrow S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

مثال: مجموع 4 جمله اول یک دنباله هندسی با قدر نسبت 2 چند برابر مجموع 3 جمله اول آن است؟

مثال: (مثال کتاب) برای محافظت از تابش فطرناک، لایه‌های محافظتی استفاده می‌شود که شدت پرتوها را در هر بار عبور نصف می‌کند. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش حداقل ۹۷ درصد کاهش یابد؟

معادله درجه ۲

اگر در کلاس) اگر $x = -1$ یک ریشه معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد، ریشه دیگر آن کدام است؟

answer

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها در معادله درجه دوم

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

در $ax^2 + bx + c = 0$ داریم: (با شرط $\Delta > 0$)

نکته: برعکس نکته قبل هم داریم! اینکه اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ آنگاه

α و β جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

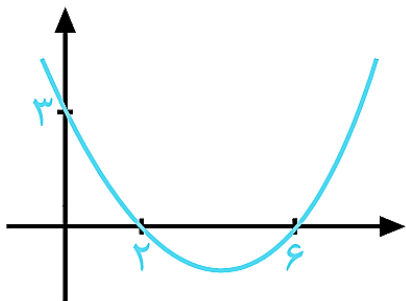
مثال: (مثال کتاب) محیط یک مستطیل ۳۳ سانتیمتر و مساحت آن ۶۵ سانتیمتر مربع است. ابعاد مستطیل را بیابید.

answer

صفرهای تابع

برای هر تابع f ، جواب‌های معادله $f(x) = 0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع می‌گوییم. به لحاظ نموداری، صفرهای تابع f همان طول نقاط تلاقی نمودار f و محور X ها است.

مثال: (مثال کتاب) اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد، ضابطه سهمی را مشخص کنید.



answer

مثال: (کار در کلاس)

مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$ برابر (-2) باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

answer

کاربرد معادله درجه ۲ (تغییر متغیر)

$$\text{عدد} (\text{🐶})^2 + \text{عدد} (\text{🐶}) + \text{عدد} = 0 \rightarrow \text{🐶} = t$$

در آخر جوابها را چک می‌کنیم که برامان موشکل ایبار نکنن کسگم!



مثال

$$x - \sqrt{x} - 6 = 0 \xrightarrow{t = \sqrt{x}} t^2 - t - 6 = 0$$

$$(t+2)(t-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -2 \\ \sqrt{x} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \text{❌} \\ \text{✅} \end{matrix} \rightarrow x = 9$$

مثال: (مثال کتاب) صفرهای تابع f با ضابطه $f(x) = (x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1) - 2$ را به دست آورید.

answer

روش هندسی حل معادلات

اگر f و g دو تابع باشند، جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ ، طول نقاط برخورد f و g می‌باشد. این روش حل را که از طریق آن، تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی آن‌ها (و گاهی دقیق) بدست می‌آید، روش هندسی (نموداری) حل معادلات می‌نامیم.

مثال: (مثال کتاب) به روش هندسی، معادله $|x| = x^2 - 2x$ را حل کنید.

answer

معادله گویا

جمع و تفریق چند عبارت گویا

$$\frac{x}{10} + \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{2x-2} \rightarrow \frac{x}{10} + \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{2(x-1)} = 0 \rightarrow \text{ک.م.م} = 10 \cdot (x-1)$$

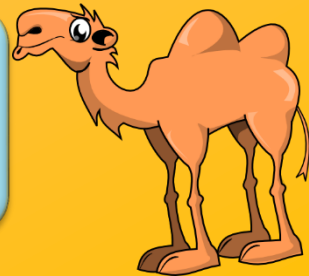
$$\rightarrow \frac{x^2 - x + 10 - 5x - 5}{10(x-1)} = 0 \rightarrow \frac{x^2 - 6x + 5}{10(x-1)} = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \quad \text{✗} \\ x=5 \quad \text{✓} \end{cases}$$

روش حل : همه‌ی عبارات یک طرف ← مخرج مشترک ← صورت برابر صفر ← فاینال چک!



جواب‌های بدست آمده را چک میکنیم تا مخرج کسری را صفر نکنند!

FINAL CHECK



مثال: (مثال کتاب) در یک مغازه ماهی‌های تزئینی، ماهی‌های آب شور در مملول‌های آب نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلوگرم مملول آب نمک ۴ درصدی ساخته. او چگونه می‌تواند غلظت مملول را به ۷ درصد برساند؟ (مسئله ۱ در دو حالت وجود نمک به اندازه کافی و عدم وجود نمک به اندازه کافی حل کنید.)

answer

مثال: (مثال کتاب) معادله $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-4}$ را حل کنید.

answer

معادله گنگ

مجهولات زیر، ادیکالین

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+5} = 1 \rightarrow \sqrt{x+6} = \sqrt{2x+5} + 1 \xrightarrow{\text{طرفین به توان فرجه، ادیکال}}$$

$$x+6 = 2x+5 + 2\sqrt{2x+5} + 1 \rightarrow -x = 2\sqrt{2x+5} \rightarrow x^2 = 8x + 20$$

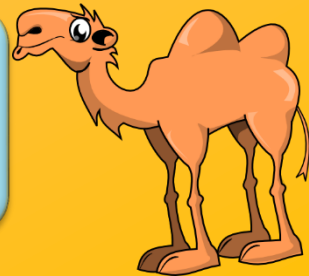
$$\rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \rightarrow (x-10)(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=10 \text{ } \otimes \\ x=-2 \text{ } \checkmark \end{cases}$$



روش حل: ادیکالو تنها کن ← به توان فرجه، ادیکال برسون ← فاینال چک!

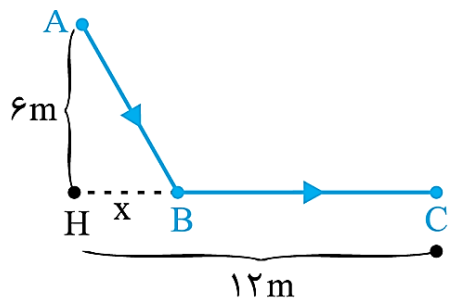
چک کن که آیا جواب‌های بدست آمده در معادله اصلی صدق می‌کنند؟

FINAL CHECK



معادله $\sqrt{x+2} - x = -4$ را حل کنید.

مثال: (مثال کتاب) یک مرغ دریایی در آسمان در نقطه **A** قرار دارد و با قصد شکار ماهی در نقطه **C**، روی آب، ابتدا از نقطه **A** تا **B** در هوا فرود می‌آید، سپس از **B** تا **C**، روی آب و به صورت افقی پرواز می‌کند. اگر برای طی هر متر در هوا، 14 کیلوکالری و روی آب، 10 کیلوکالری انرژی مصرف کند، **B** در چه فاصله‌ای از **C** باید باشد تا مرغ دریایی روی هم 180 کیلوکالری انرژی مصرف کند؟

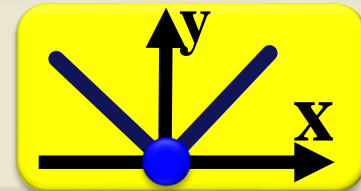


answer

مفهوم قدر مطلق

مفهوم قدر مطلق | | قدر مطلق تابعی است مثبت کن!

$$|-3| = 3 \quad |x^2 + 1| = x^2 + 1 \quad |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$



$$\sqrt{7} - 4\sqrt{3} =$$

$$\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1} =$$

خلاصی از شرط قدر مطلق متویات داخلش و تعیین علامت کن! جاهایی که مثبت خودش

$$|\Delta| = \begin{cases} \Delta & , \Delta \geq 0 \\ -\Delta & , \Delta < 0 \end{cases}$$

فارج میشه و جاهایی که منفیه، قرینش!

برخی ویژگی‌های قدر مطلق

$$|A^{rn}| = |A|^{rn} = A^{rn}$$

$$|A| = |B| \rightarrow A = \pm B$$

$$|-A| = |A|$$

$$\left| \frac{A}{B} \right| = \frac{|A|}{|B|}$$

$$|AB| = |A||B|$$

$$|A \pm B| \neq |A| \pm |B|$$

$a > 0$

عزت‌فنگدار

۱ if $x^2 \geq a^2 \leftrightarrow x \geq a$ or $x \leq -a$

۲ if $x^2 \leq a^2 \leftrightarrow -a \leq x \leq a$

۳ if $|x| \geq a \leftrightarrow x \geq a$ or $x \leq -a$

۴ if $|x| \leq a \leftrightarrow -a \leq x \leq a$

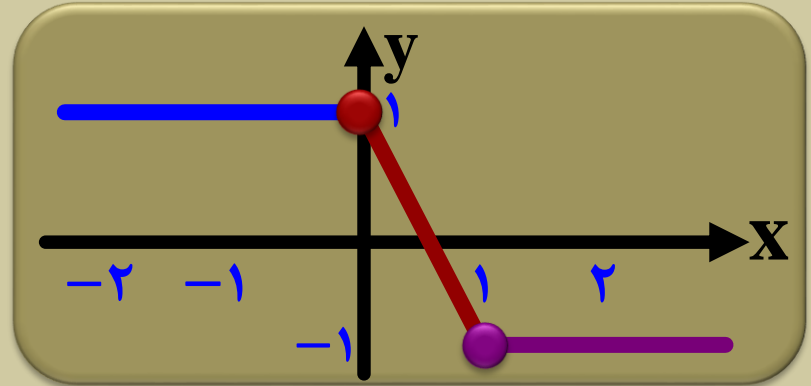
مثال: (مثال کتاب) معادله $|3x - 2| = |x - 4|$ را حل کنید.

answer

ex

$$y = |x-1| - |x| \quad \text{رسم نمودار} \rightarrow$$

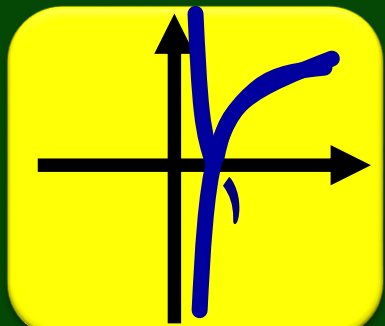
$$y = \begin{cases} (x-1) - (x) & ; x \geq 1 \\ -(x-1) - (x) & ; 0 \leq x < 1 \\ -(x-1) + (x) & ; x < 0 \end{cases}$$



مثال: (مثال کتاب) نمودار f تابع با ضابطه $f(x) = |x-1| + |x+2|$ را رسم کنید.

ex

$$y = \left| \log_2 x \right|$$



رسم نمودار $|f(x)|$

جاهایی از نمودار که زیر محور x هست را
آینهوار بیاور بالا! (قرینه نسبت به محور x ها)

(کار در کلاس) به روش هندسی، معادله $|x^2 - 1| = |2x - 1|$ را حل کنید و تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی آن‌ها را بیابید.

answer

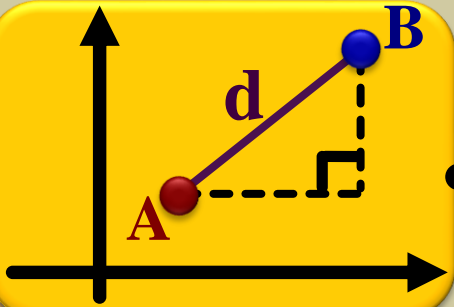
مختصات وسط پاره خط

در واقع وسط یعنی میانگین!



$$X_M = \frac{X_A + X_B}{2} \quad Y_M = \frac{Y_A + Y_B}{2}$$

فاصله دو نقطه از هم



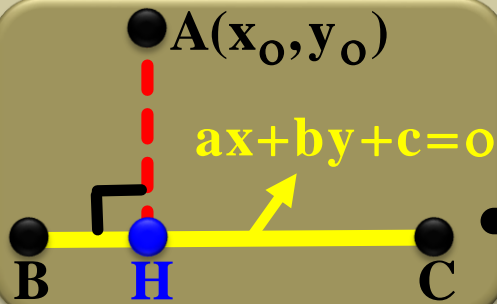
$$|AB| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال: (مثال کتاب) معادله عمود منصف پاره فطی را بنویسید که دو نقطه $A \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}$ را به هم وصل کرده است.
آیا نقطه $P \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$ روی عمود منصف AB قرار دارد؟

answer

فاصله نقطه از خط

معادله خط متما باید ضمنی باشد... داریم :



$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: (مثال کتاب) فاصله نقطه $A(1, -4)$ از خط $8x + 6y = k$ برابر ۴ است. مقدار k چقدر است؟

answer

مثال: اگر در کلاس) اگر نقطه $A(2, 3)$ ، اس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $3x - 4y = 9$ باشد، مساحت مربع
پقدر است؟

answer

حل نمونه سوال بیشتر (کتاب + امتحانات گذشته)

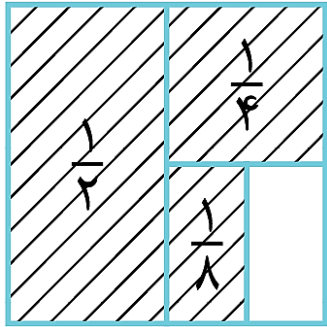
(تمرین کتاب) در دنباله حسابی $5, 8, 11, \dots$ حداقل چند جمله از آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از 493 بیشتر شود؟

answer

(تمرین کتاب) مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب ۶ هستند چقدر می شود؟

answer

(تمرین کتاب) طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقیمانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقیمانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟



answer

(تمرین کتاب) صفحهای تابع $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x$ را در صورت وجود به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب) معادله روبه رو را حل کنید. $\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0$

answer

(تمرین کتاب) تعداد ریشه‌های معادله $|x-1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به دست آورید.

answer

$$\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$$

(تمرین کتاب) معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{5}{\sqrt{x}+2} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$$

answer

(تمرین کتاب) ماشین **A** کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین **B** انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

(تمرین کتاب) با استفاده از تعیین علامت، ضابطه تابع $f(x) = |x-1| + |x+1|$ را بدون قدر مطلق بنویسید.

تمرین کتاب) معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{2-x}{|x-3|} = 1$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1$$

(تمرین کتاب) نمودار تابع $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| - 2$ را رسم کنید، سپس معادله $f(\mathbf{x}) = 1$ را هم به روش هندسی و هم به روش جبری حل نمایید.

answer

(تمرین کتاب) $A(0,6)$ و $B(8,-8)$ نقاط دو سر قطر یک دایره اند. مفتحات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب) خط $4x + 3y = 5$ بر دایره C به مرکز $(-1, 2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

answer

(تمرین کتاب) اگر فاصله نقطه $A(1,2)$ از خط $ax + 4y = 1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

answer

(تمرین کتاب) نقطه‌ای روی خط $y = 2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و تا نقطه‌ی $A(2, 4)$ برابر ۵ باشد.

answer

(تیزهوشان سال ۱۴۰۲) در معادله $2x^2 - 8x + m = 0$ ، اگر یکی از جواب‌ها دو واحد از جواب دیگر بزرگتر باشد، m و هر دو جواب معادله را بیابید.

answer

(امتحانات سال ۱۴۰۲) محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر مربع است. اندازه طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

answer

(امتحانات تیزهوشان ۱۴۰۲) در یک دنباله هندسی غیر ثابت، جمله اول آن، نصف مجموع دو جمله بعدی است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

answer

(امتحانات تیزهوشان ۱۴۰۲) در یک دنباله هندسی، مجموع ده جمله اول ۳۳ برابر مجموع ۵ جمله اول است. قدر نسبت دنباله را به دست آورید.

answer

(امتحانات تیزهوشان ۱۴۰۲) مساحت مربعی را بیابید که یک رأس آن $A(-1, 3)$ و $3x - 4y + 1 = 0$ معادله

یک ضلع آن است.

answer

رياضيت پامن