ریاضی ۳

فصل ۱ :

تابع

(۷/۵ نمره)

توابع چندجمله‌ای

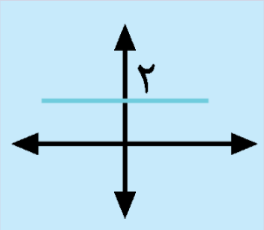
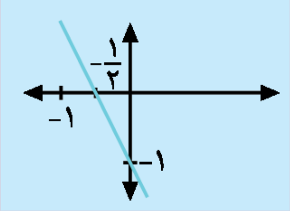
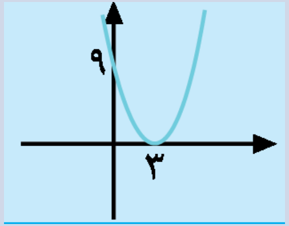
هر تابع به صورت $f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ که در آن ضرایب (a_i ها) از جنس اعداد حقیقی و

توان‌ها از جنس اعداد حسابی‌اند و $a_n \neq 0$

دامنه این توابع $\mathbb{R}$ است و بزرگترین توان در آن‌ها، درجه‌شان را مشخص می‌کند. مثلا $y=4$ یک چندجمله‌ای از

درجه صفر و $y=\sqrt{2}x^3-1$ یک چند جمله از درجه ۳ است.

حالات خاص توابع چند جمله‌ای را در جدول زیر ببینید : (مثال کتاب)

درجه تابع	۰	۱	۲
نام تابع	ثابت	خطی	درجه ۲
ضابطه کلی	$f(x)=b\ ;\ b\in\mathbb{R}$	$f(x)=ax+b\ ;\ a\neq ۰$	$f(x)=ax^{۲}+bx+c\ ;\ \ a\neq ۰$
مثال			

مثال پشمک: نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$ را از طریق نقطه‌یابی رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

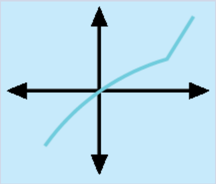
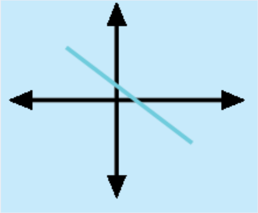
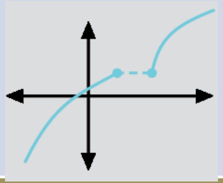
answer

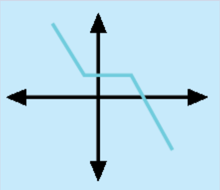
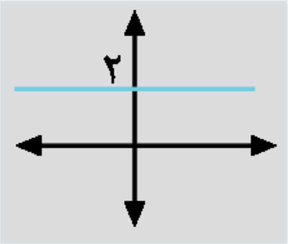
مثال: نمودار تابع $y = -۲(x-۱)^۳ + ۱$ را به کمک انتقال رسم کنید.

answer

توابع صعودی و توابع نزولی

صفر تا صد داستان، انتظارتان را می‌کشد!

مثال	تعریف ریاضی	تعریف فارسی	نوع تابع
	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$	با افزایش x، مقدار y افزایش می‌یابد.	اکیداً صعودی
	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$	با افزایش x، مقدار y کاهش می‌یابد.	اکیداً نزولی
	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$	با افزایش x، مقدار y زیاد می‌شود یا ثابت می‌ماند.	صعودی

مثال	تعریف ریاضی	تعریف فارسی	نوع تابع
	$x_{۲} > x_{۱} \Leftrightarrow f(x_{۲}) \le f(x_{۱})$	با افزایش x، مقدار y کم می‌شود یا ثابت می‌ماند.	نزولی
	به ازای هر $x_{۱}, x_{۲} \in D_f$ داریم: $f(x_{۱}) = f(x_{۲})$	همواره مقدار yثابت است.	ثابت (هم صعودی هم نزولی)

ترکیب دو تابع f و g

$$gof(x)=g(f(x)) \quad \text{و} \quad fog(x)=f(g(x))$$

نکته: حواست باشه تو محاسباتت باید به‌جای حرف o، پرانتز بذاری. مثلا $fogoh(۳)$ یعنی $f(g(h(۳)))$.
محاسباتت رو از داخل شروع کن. تو همین مثال، اول $h(۳)$ رو حساب کن! مثلا میشه **k** بعد $g(k)$ رو حساب کن! مثلا میشه **m** در آخر هم $f(m)$ حساب شه!

دامنه تابع مرکب

$$D_{fog}=\{\overset{(۱)}{\boxed{x\in D_g}} \mid \overset{(۲)}{\boxed{g(x)\in D_f}}\}$$

$$D_{fog}=\{x \mid \overset{(۱)}{\boxed{x\in D_g}} \,,\, \overset{(۲)}{\boxed{g(x)\in D_f}}\}$$

که این دو هیچ فرقی با هم ندارن!

نکته: دامنه تابع رو همیشه از راه تعریف (که الان گفتم) به دست بیارید نه از روی ساختن ضابطه!

مثال: (مثال و کار در کلاس کتاب) در هر قسمت، موارد خواسته شده را بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt{x-1}$ ، $g(x)=2x^2-1 \leftarrow$ دامنه و ضابطه $fog(x)$ ؟

answer

ب) $f(x)=\dfrac{۲}{x-۱} \leftarrow$ دامنه و ضابطه $fof(x)$ ؟

answer

مثال: توابع $f=\{(۱,۲),(۳,۴)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۵,۶)\}$ مفروضند. تابع gof را به دست آورید.

answer

تبدیل نمودار توابع

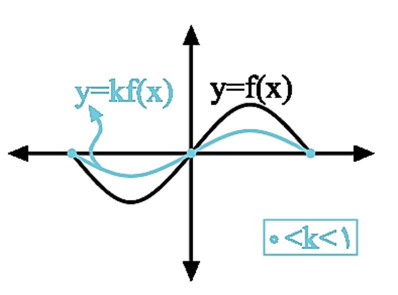
۱- رسم نمودار : $y = kf(x)$

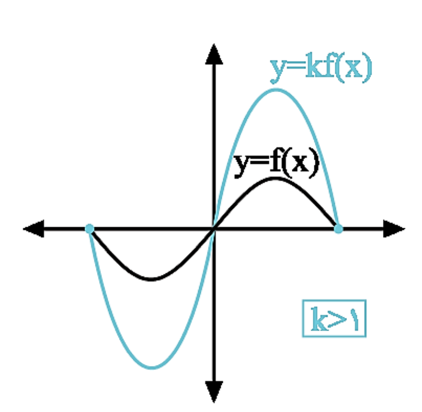
اگر $0 < |k| < 1$ ، نمودار $f(x)$ با ضریب k به طور عمودی منقبض می‌شود.

اگر $|k| > 1$ ، نمودار $f(x)$ با ضریب k به طور عمودی منسبط می‌شود.

دامنه دو تابع $y = f(x)$ و $y = Af(x) + B$ یکی است، اما حدود برد آن‌ها صرفاً یکی نیست.

نیم نگاهی به دو نمودار مقابل بیاندازید:

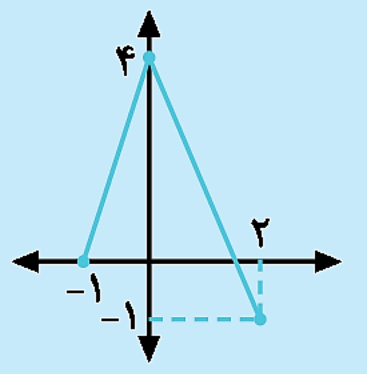




نکته: حواست باشه اگر k منفی بود، اول بدون توجه به علامت منفی، انقباض یا انبساط عمودی رو انجام بده، بعد نسبت به محور xها قرینه کن!

مثال: (مثال کتاب با تغییر) در شکل زیر، نمودار $y = f(x)$ داده شده، به کمک آن نمودار $y = -\frac{۱}{۲}f(x) + ۱$ را رسم کنید.

answer



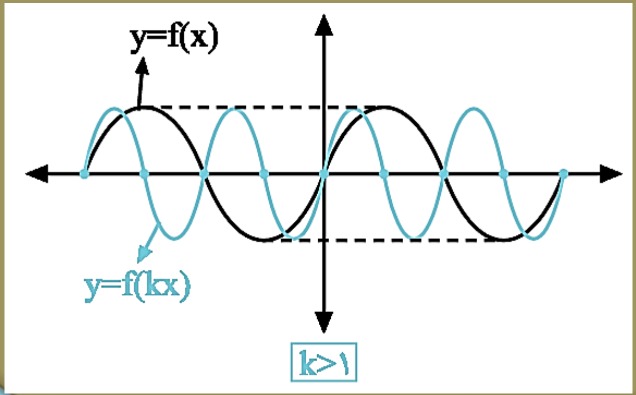
۲- رسم نمودار : $y = f(kx)$

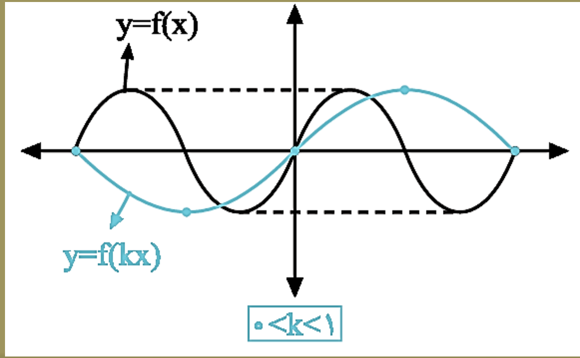
اگر $0 < |k| < 1$ ، نمودار $f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ به طور عمودی منبسط می‌شود.

اگر $|k| > 1$ ، نمودار $f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ به طور عمودی منقبض می‌شود.

برد دو تابع $y = f(\Delta)$ و $y=f(\square)$ یکی است، اما دامنه آن‌ها صرفاً یکی نیست.

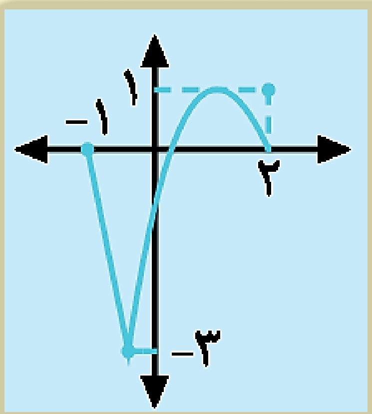
نیم نگاهی به دو نمودار زیر بیاندازید:





نکته: اگر $k<0$ ، اول بدون توجه به علامتش انقباض یا انبساط افقی رو بزن، بعد نمودارو نسبت به محور yها قرینه کن!

مثال: نمودار تابع g داده شده است. به کمک آن نمودار $2g(-\frac{x}{2})$ را رسم کنید.



answer

وارون f

اگر وارون f خود یک تابع باشد، آنگاه می‌گوییم f وارون‌پذیر است و این اتفاق زمانی می‌افتد که f یک به یک باشد.

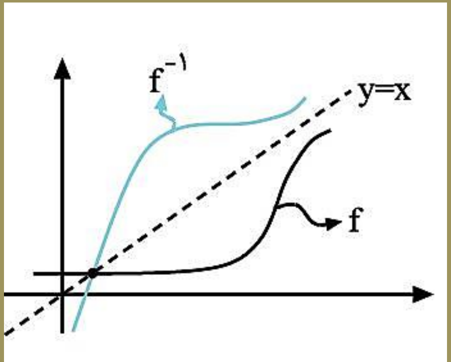
وارون کردن f از روی زوج مرتب

کافی است جای مولفه‌های اول و دوم را عوض کنید.

نتیجه: اگر $A(a,b)$ روی f باشد آنگاه $A'(b,a)$ روی f^{-1} است و بالعکس.

وارون کردن f از روی نمودار

نمودار توابع f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ (نیم‌ساز اول و سوم) قرینه‌اند. به شکل روبه‌رو به عنوان یک مثال دقت کن دوست من $\Leftarrow$



نکته: $D_f = R_{f^{-1}}$ و $R_f = D_{f^{-1}}$

نکته: هر جا لازم بود $D_{f^{-1}}$ را بیابید، می‌توانید R_f را محاسبه کنید، تمام!

نکته: ترکیب دو تابع **f** و f^{-1} همانی است. یعنی:

$$1)\quad f^{-1}of(x) = x \quad ; \quad x \in D_f = R_{f^{-1}} \qquad 2)\quad fof^{-1}(x) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}} = R_f$$

نکته: پس دقت کنید که درست است که $f^{-1}of(x)$ و $fof^{-1}(x)$ هر دو می‌شوند **x**، اما حدود **x** برای این دو لزوماً برابر نیست. برای اولی شد D_f و R_f برای دومی(همون $D_{f^{-1}}$).

مثال: اگر $f=\{(۱,۴)(۲,۳)(۳,۵)\}$، $f^{-۱}$، $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را بیابید.

answer

یک نتیجه از بحث‌های گوشت تلخ فوق!

با استفاده از نکته زیر می‌توان پی برد که آیا دو تابع **f** و **g** معکوس هم هستند یا خیر. به این صورت که:

اگر $fog(x) = x \ \& \ gof(x) = x$ آنگاه **f** و **g** معکوس یکدیگرند.

مثال: مثال کتاب نشان دهید توابع $f(x) = ۳x - ۴$ و $g(x) = \frac{x + ۴}{۳}$ وارون یکدیگرند.

answer

روش به دست آوردن ضابطه وارون تابع f

برای محاسبه وارون f ، ابتدا x را برحسب y بنویسید (x رو یه طرف تنها کن!) بعد به جای x بنویسید $f^{-1}(x)$ و به جای y بنویسید x

مثال: (کار در کلاس) ضابطه وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

الف) $h(x) = x^{2} + 1$

answer

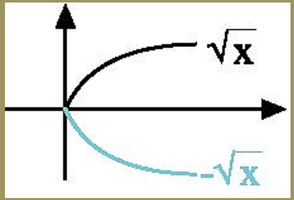
ب) $f(x) = ١ + \sqrt{x - ٢}$

answer

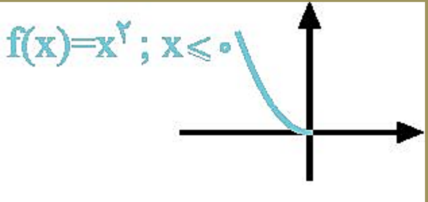
محدود کردن دامنه f (تحدید کردن f)

گاهی **f** در دامنه تعریفش غیر یک به یک و در نتیجه وارون‌ناپذیر است. در این صورت دامنه آن را طوری محدود می‌کنیم (دلخواه) که **f** در دامنه جدیدش وارون‌پذیر شود. به این عمل تحدید کردن **f** می‌گویند.

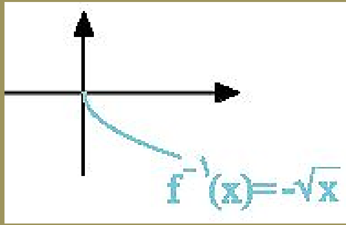
مثلا با توجه به اینکه $y=x^2$ یک سهمی است، وارون‌ناپذیر است. اگر بروید سراغ محاسبه f^{-1} ، به $f^{-1}=\pm\sqrt{x}$ می‌رسید که تابع نیست. $\Leftarrow$



با محدود کردن دامنه **f** به طور دلخواه، مثلاً $x\le 0$ ، **f** یک به یک و معکوس‌پذیر می‌شود $\Leftarrow$



و نمودار معکوس **f** هم می‌شود



دقت شود که

$$\begin{cases} D_{f^{-1}}=R_f=[0,+\infty) \\ R_{f^{-1}}=D_f=(-\infty,0] \end{cases}$$

۱- (تمرین کتاب) نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص نمایید.

$$y = (x - ۱)^{۳} - ۱$$

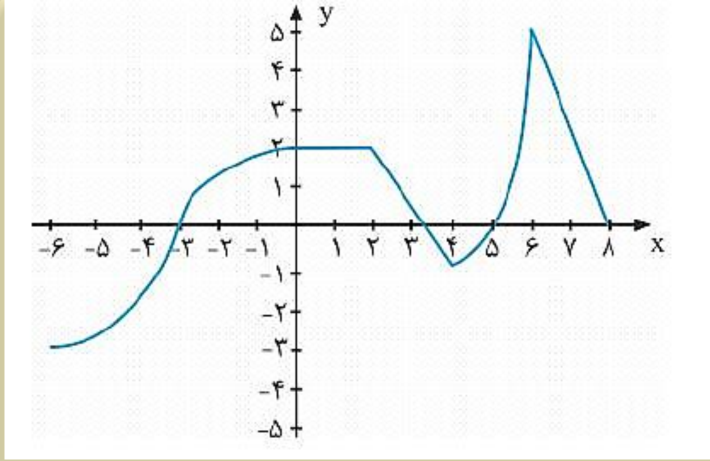
answer

۲- (تمرین کتاب) نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -۲x-۳ & x<-۴ \\ ۳ & -۴\leq x<۲ \\ ۳x-۲ & x\geq ۲ \end{cases}$$

answer

۳- (تمرین کتاب) با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



answer

۴- (تمرین کتاب) تابع نمایی $y = ۲^{x} - ۲$ و تابع لگاریتمی $y = -\log_{۲}^{x} + ۲$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آن‌ها توضیح دهید.

answer

۵- (تمرین کتاب) تابع $y = x^{۲}|x|$ در بازه $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟

answer

۶- (تمرین کتاب) در هر قسمت، موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{۳-۲x}\quad ;\quad g(x)=\dfrac{۶}{۳x-۵}\quad :\quad D_{fog}\,,(fog)(x)$

answer

ب) $f(x)=\sqrt{x+۲}$; $g(x)=\sqrt{x^{۲}-۱۶}$: $D_{gof}, (gof)(x)$

answer

پ) $f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x} \quad : \quad D_{gof}, (gof)(x)$

answer

۷- (تمرین کتاب) اگر $f(g(x)) = ۳x^۲ - ۶x + ۱۴$ و $f(x) = ۳x - ۴$ ، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

answer

۸- (تمرین کتاب) مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x) = x^۲ - ۴$ و $g(x) = \sqrt{x^۲ - ۴}$ ، آنگاه $(fog)(۵) = -۲۵$

answer

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(fog)(x) = (gof)(x)$ هیچ‌وقت برقرار نیست.

answer

پ) اگر $f(۷) = ۵$ و $g(۴) = ۷$ ، آنگاه $(fog)(۴) = ۵$

answer

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x-۱$ ، آنگاه $(fog)(۵)=g(۲)$.

answer

۹- (تمرین کتاب) تابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

$$h(x) = \sqrt[۳]{x^{۲} + ۱}$$

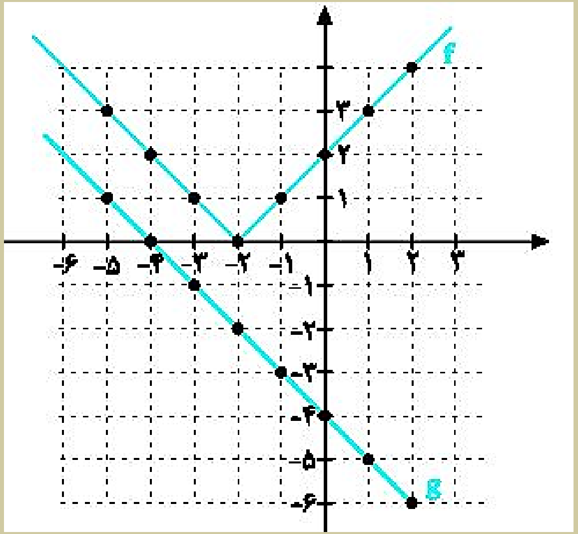
answer

۱۰- (تمرین کتاب) با توجه به نمودارهای توابع f و g، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

answer

الف) $(fog)(-۱)$

ب) $(gof)(۰)$



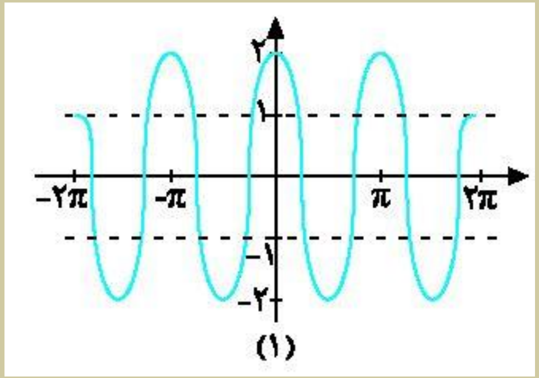
۱۱- (تمرین کتاب) با توجه به ضابطه‌ی توابع f و g ، معادله مورد نظر را تشکیل داده و آن را حل کنید.

$$f(x) = ۲x - ۵ \quad , \quad g(x) = x^{۲} - ۳x + ۸ \quad : \quad (fog)(x) = ۷$$

answer

۱۲- (تمرین کتاب) با استفاده از نمودار $y = \cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه‌های هر نمودار را مشخص کنید.

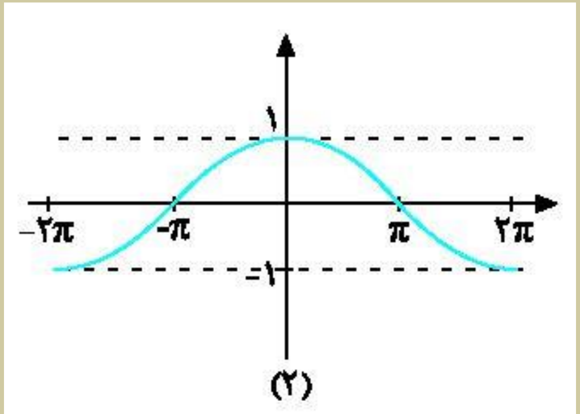
الف)



answer

answer

ب)



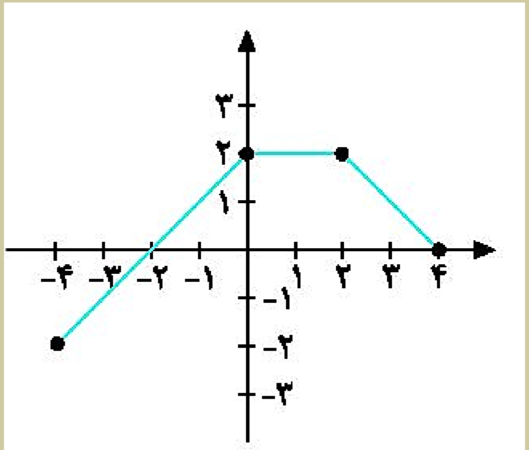
۱۳- (تمرین کتاب) نمودار تابع $y=-\sin 2x-1$ را به کمک نمودار تابع $y=\sin x$ در بازه $[-\pi,\pi]$ رسم کنید.

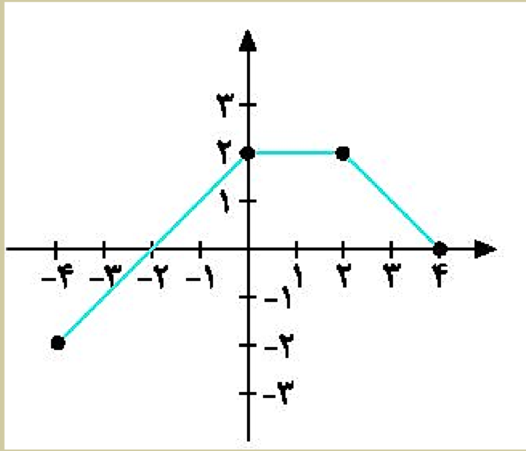
answer

۱۴- (تمرین کتاب) با استفاده از نمودار تابع f ، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.

answer

الف) $y = -f(-x) + ۲$





ب) $y = ۲f(x - ۱) - ۳$

answer

۱۵- (تمرین کتاب) نشان دهید تابع زیر یک به یک است، سپس ضابطه‌ی تابع وارون آن را به دست آورید.

$$g(x) = -۵ - \sqrt{۳x + ۱}$$

answer

۱۶- (تمرین کتاب) نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

$$f(x) = -\sqrt{x-۸} \quad , \quad g(x) = ۸ + x^۲ ; x \leq ۰$$

answer

۱۷- (تمرین کتاب) توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه آن‌ها توابعی یک به یک بسازید.

answer

الف) $f(x) = |x|$

ب) $g(x) = -x^{۲}$

۱۸- (تمرین کتاب) اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^{۳}$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

answer

الف) $(fog)^{-۱}(۵)$

$f(x) = \frac{۱}{۸}x - ۳$ $\quad g(x) = x^{۳}$

ب) $(f^{-۱} o f^{-۱})(۶)$

answer

$f(x) = \frac{١}{٨}x - ٣$ $\quad g(x) = x^{٣}$

ب) $(g^{-١} o f^{-١})(٥)$

answer

فصل ۲ :

مثلثات

(۶/۵ نمره)

تناوب و تابع متناوب

تابع f را متناوب می‌گوییم، هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T وجود داشته باشه به طوری‌که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$.

(یعنی نمودارش هر T واحد یک بار تکرار می‌شود.) کوچکترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می‌نامیم.

توابع $\boxed{y = a \, \mathrm{Sin} \, bx + C}$ و $\boxed{y = a \, \mathrm{Cos} \, bx + C}$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + C$ و مقدار مینیمم $-|a| + C$

و دوره تناوب $T = \dfrac{۲\pi}{|b|}$ است.

مثال (مثال کتاب درسی) دوره تناوب و مقادیر max و min هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = ۳\,\mathrm{Sin}(۲x) - ۲$

answer

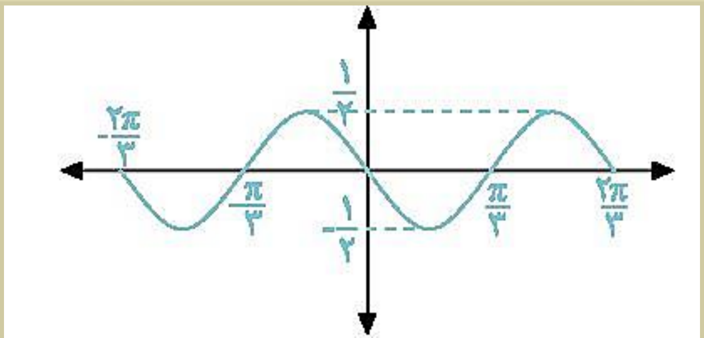
ب) $y = -\frac{۱}{۴}\text{Cos}(\pi x)$

answer

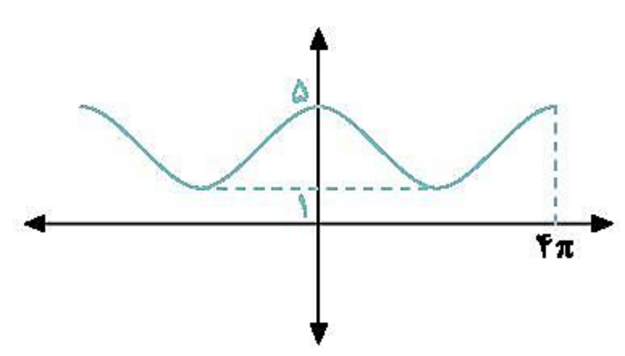
مثال (مثال کتاب) هر یک از نمودارهای زیر مربوط به $y = a\,Sin\,bx + C$ یا $y = a\,Cos\,bx + C$ است. با تشخیص **max** و **min** و دوره تناوب، ضابطه هر کدام را مشخص کنید.

answer

الف)

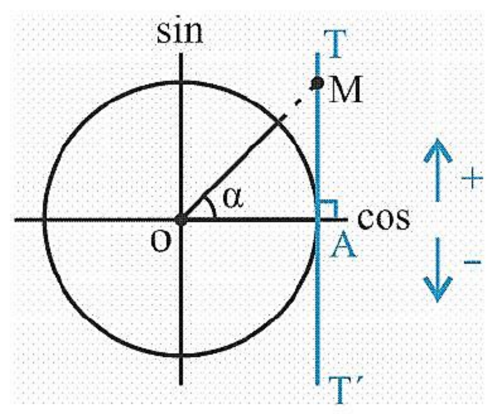


ب)



answer

تانژانت



در دایره مثلثاتی روبه‌رو، انتهای ضلع متحرک زاویه α را امتداد می‌دهیم تا محور عمودی TAT' را در نقطه **M** قطع کند. در مثلث قائم‌الزاویه **OAM** داریم:

$$\tan\alpha = \frac{MA}{OA} \xrightarrow{oa=1} \boxed{\tan\alpha = MA}$$

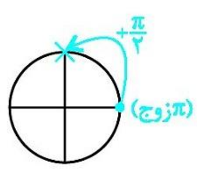
نتیجه: محور قائم TAT' ، همان محور tan هاست (موازی Sin). برای به دست آوردن tan یک زاویه دلخواه، کافی است انتهای ضلع متحرک آن زاویه را امتداد دهید تا محور tan ها را قطع کند!

تغییرات tan

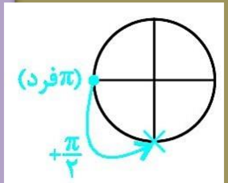
قبل از هر چیزی عرض کنم که $\tan x$ در مقادیری که مخرجش صفر است (یعنی $\operatorname{Cos} x = 0$) تعریف نمی‌شود

($x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ که $k \in \mathbb{Z}$). اگر به **k** اعداد زوج بدهیم،

این مقادیر در بالای دایره مثلثاتی قرار می‌گیرند



و اگر **k** فرد باشد، در پایین دایره قرار می‌گیرند.

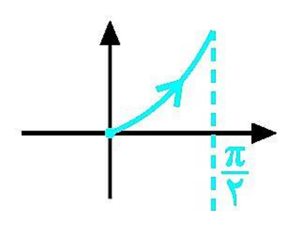


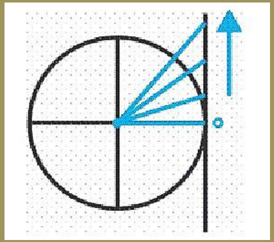
لازم به ذکر است که این نقاط مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ هستند $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ و هنگام رسم نمودار، در این طول‌ها، یک خط چین قائم رسم می‌کنیم. (**x** که به این نقاط میل می‌کنه، $\tan x$ تشریفشو می‌بره ∞). خب! با این مقدمات بریم سراغ بررسی داداش تانژانت در نواحی مختلف و رسم نمودارش!

۱- ناحیه اول ؛ در شروع این ربع مقدار tan صفر می‌شود. هر چه مقدارزاویه بیشتر شود، مقدار tan زاویه هم

بیشتر می‌شود تا به $+\infty$ میل کند. نمودارش را ببینید $\Leftarrow$

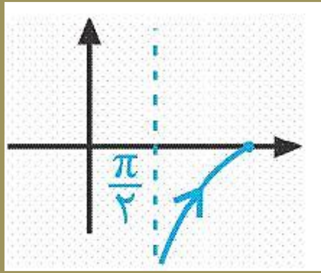
نتیجه ؛ در ربع اول، تابع tan x یک تابع صعودی است. (البته صعودی اکیدا!)

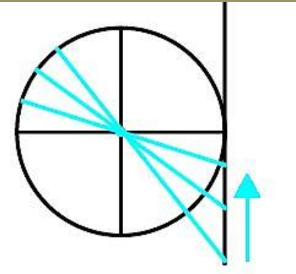




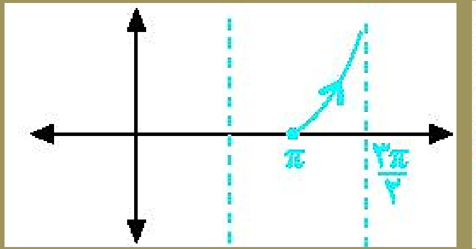
۲- ناحیه دوم ؛ در شروع این بازه، مقدار tan x ، $-\infty$ است. (منفی بی‌نهایت چون در ربع دوم tan x منفی است)

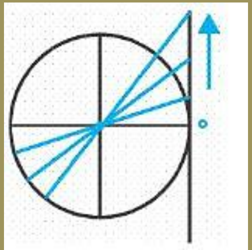
هر چه مقدار کمان بیشتر می‌شود، tan x این کمان هم زیادتر می‌شود تا اینکه بشود صفر. این هم نمودارش $\Leftarrow$





نتیجه: در ربع دوم هم تابع $\tan x$ تابعی صعودی اکید است.

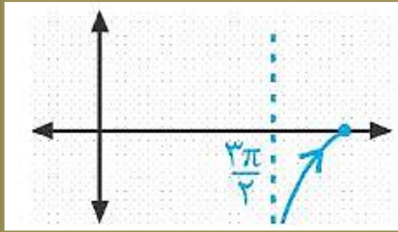


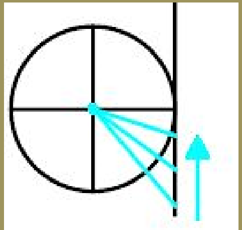


۳- ناحیه سوم: در شروع این بازه مقدار $\tan$ ، صفر است و رفته رفته

به میل $+\infty$ می‌کند. این هم نمودارش ⇐

نتیجه: در ربع سوم هم $\tan x$ تابعی صعودی اکید است.





۴- ناحیه چهارم: در شروع این بازه مقدار $\tan$ ، $-\infty$ است. رفته رفته

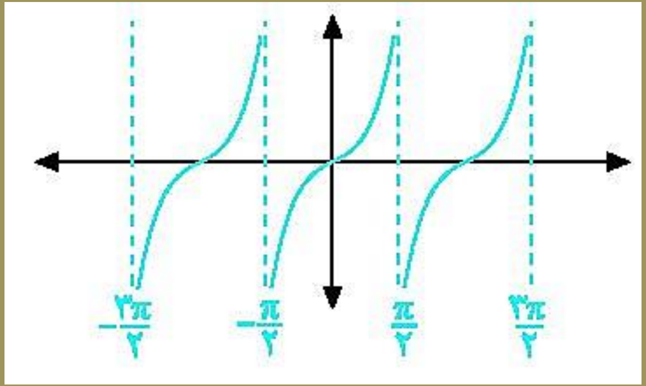
زیاد و زیادتر می‌شود تا اینکه به صفر برسد. این هم نمودارش ⇐

نتیجه: در ربع چهارم هم تابع $\tan x$ صعودی اکید است.

تابع tan

این تابع به ازای هر زاویه دلخواه در دایره (به‌جز $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ که $k \in \mathbb{Z}$) تعریف شده است. پس دامنه آن می‌شود $\Leftarrow$ $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

اگر تکه‌هایی از نمودار tan را که برایتان رسم کردم، به هم بچسبانید، به نمودار کلی tan می‌رسید:



ویژگی‌هایی از تابع که از نمودار قبل برداشت می‌شوند:

۱- این تابع متناوب است با دوره تناوب π . به طور کلی دوره تناوب تابع $y = A\tan(ax) + B$ می‌شود: $T = \frac{\pi}{|a|}$

۲- این تابع در کل دامنه‌اش غیر یکنواست.

۳- این تابع در بازه‌هایی که ریشه مخرجش در آن بازه نباشد (یعنی بازه‌ها بین دو خطچین باشه و خطچینی تو بازه نباشه) صعودی اکید است.

نسبت‌های مثلثاتی زاوایای دو برابر کمان

در محاسبات فنی‌ای که جلوتر به آن برخورد خواهیم کرد (معادلات مثلثاتی) به ۴ فرمول زیر نیاز داریم:

$$\operatorname{Sin} ۲\alpha = ۲\operatorname{Sin}\alpha.\operatorname{Cos}\alpha$$

$$\operatorname{Cos} ۲\alpha \begin{cases} \longrightarrow = \operatorname{Cos}^{۲}\alpha - \operatorname{Sin}^{۲}\alpha \\ \longrightarrow = ۲\operatorname{Cos}^{۲}\alpha - ۱ \\ \longrightarrow = ۱ - ۲\operatorname{Sin}^{۲}\alpha \end{cases}$$

مثال: (مثال کتاب) مقدار $Sin۱۵^\circ$ و $Cos۱۵^\circ$ را بیابید.

answer

معادلات مثلثاتی

معادلاتی‌اند که مجهول در آن‌ها، کمان نسبت‌های مثلثاتی است. مثلاً $\operatorname{Sin} x = ۱$ یک معادله مثلثاتی است و منظور از حل آن یعنی یافتن کمان‌هایی که سینوس آن‌ها برابر یک می‌شود. در کتاب شما، خوشبختانه طراحان دل‌رحمی به خرج داده‌اند و فقط ۲ مدل از این معادلات را زیر ذره‌بین برده‌اند! (خدایشان خیر دهاد!!)

مدل ا: معادلات سینوسی به فرم $\operatorname{Sin} x = \operatorname{Sin} \alpha$ که جوابش می‌شود $x = ۲k\pi + \alpha$ و $x = (۲k + ۱)\pi - \alpha$ که $k \in \mathbb{Z}$

مثال: (کار در کلاس کتاب) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\operatorname{Sin} x - \sqrt{۳} = ۰$

answer

نکته: اگر $\sin$ مساوی یک عدد منفی شد کاری به منفی نداشته باشید، زاویه α را به‌دست بیاورید بعد منفی را ببرید داخل

ب) $۴\sin x + \sqrt{۸} = ۰$

answer

مدل ۲: معادلات کسینوسی به فرم $\cos x = \cos \alpha$ که جوابش می‌شود $x = 2k\pi \pm \alpha$ که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: (مثال کتاب) معادله $\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

answer

نکته: اگر $\cos$ مساوی یک عدد منفی شد، کاری به منفی نداشته باشید و زاویه α را بیابید.

در نهایت جلوی $\cos$ بنویسید. $\pi-\alpha$

ex) $\cos(۲x)=-\frac{۱}{۲}$

۱- (تمرین کتاب) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y=-\pi\sin(\frac{x}{۲})-۲$

answer

ب) $y = -\frac{۳}{۴}\cos ۳x$

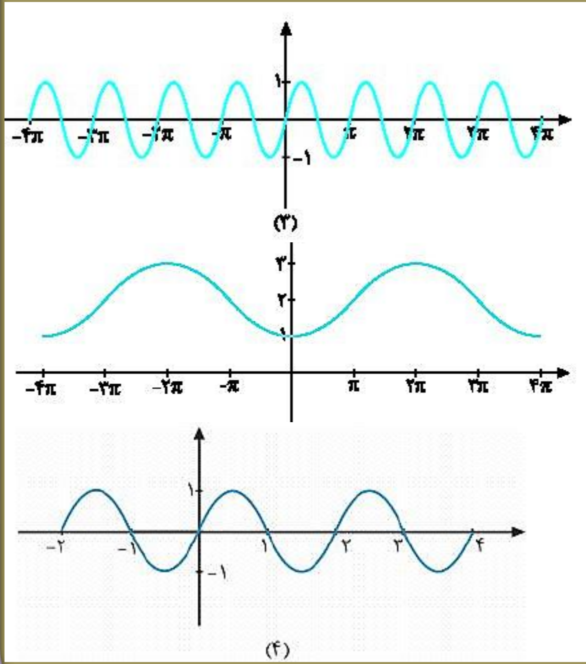
answer

۲- (تمرین کتاب) هر یک از توابع داده شده را به نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin \pi x$

ب) $y = ۲ - \cos \frac{۱}{۲} x$

پ) $y = \sin ۲x$



answer

۳- (تمرین کتاب) در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف) $T = \pi$, $\max = ۳$, $\min = -۳$

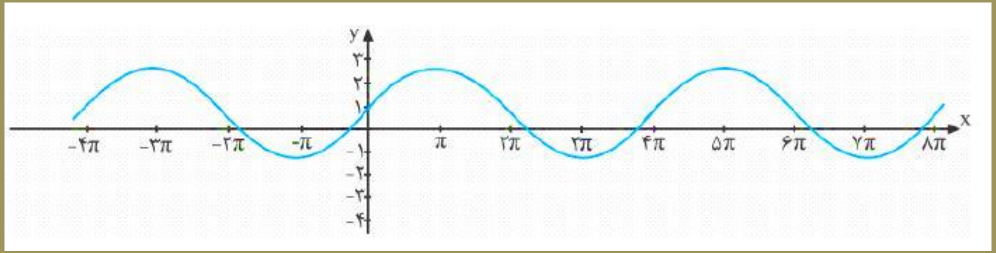
answer

ب) $T = ۳$, $max = ۹$, $min = ۳$

answer

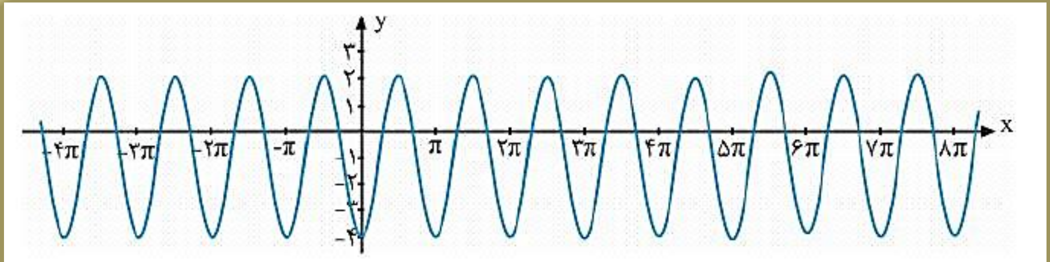
۴- (تمرین کتاب) ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

الف)



answer

ب)



answer

۵- (تمرین کتاب) کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد.

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

answer

۶- (تمرین کتاب) با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید

الف) $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$

answer

ب) $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$

answer

۷- (تمرین کتاب) فرض کنید $\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\cos ۲\alpha$ ب) $\sin ۲\alpha$

answer

۸- (تمرین کتاب) نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

answer

۹- (تمرین کتاب) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{۲} = \sin ۳x$

answer

ب) $\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$

answer

پ) $\cos x = \cos ۲x$

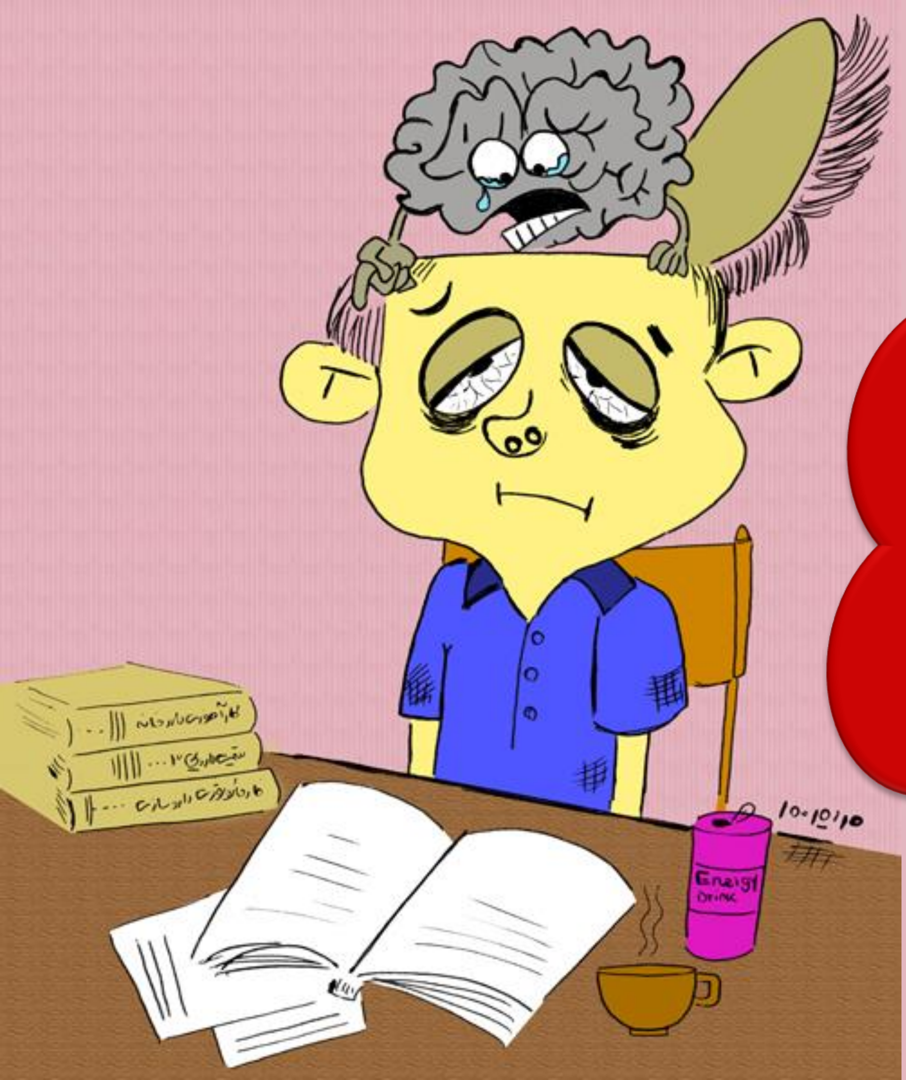
answer

ت) $\cos ۲x - \sin x + ۱ = ۱$

answer

ث) $\cos^{۲} x - \sin x = \frac{۱}{۴}$

answer



فصل ۳ :

حد

بخش‌پذیری چند جمله‌ای بر عبارت درجه اول $ax + b$

در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه دوم $ax+b$ ، باقی‌مانده تقسیم می‌شود $f(-\frac{b}{a})$

(در واقع $ax+b$ رو باید مساوی صفر بزاری $ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$. بعد این ریشه رو قرار بدی تو چند جمله‌ای!)

نتیجه: اگر $f(-\frac{b}{a})$ صفر شود، آنگاه $f(x)$ بر $ax+b$ بخش‌پذیر است و بالعکس. از این نتیجه برای تجزیه چندجمله‌ای‌ها استفاده می‌شود.

مثال: (کار در کلاس کتاب) نشان دهید $f(x) = ۲x^۳ + ۵x^۲ - ۳x - ۱۰$ بر دو جمله‌ای $x + ۲$ بخش‌پذیر است.

answer

رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع کسری

ممکن است از این قسمت دو مدل سؤال ببینید:

مدل اول: اگر در صورت، مخرج یا هر دو، یک تابع چندجمله‌ای دیدید که وقتی $x \to a$ ، مقدارش صفر می‌شود، یعنی آن چندجمله‌ای بر $x - a$ بخش‌پذیر است. با تقسیم این چندجمله‌ای بر $x - a$ ، آن را تجزیه کنید و تمام!

مدل دوم: اگر کسر داده شده شامل عبارتی رادیکالی بود که در نقطه حدی داده شده مقدارش صفر می‌شد، با ضرب صورت و مخرج کسر در مزدوج عبارت رادیکالی و حذف عامل صفرساز از صورت و مخرج ، گره از کارمان باز می‌شود

انشاا... و دیگر ریخت نحس $\frac{0}{0}$ را نخواهیم دید!

مثال: (مثال کتاب) حد تابع $f(x)=\dfrac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}$ را در نقطه $x=-2$ در صورت وجود بیابید.

answer

مثال: (مثال کتاب) حد تابع $g(x)=\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}$ را در نقطه $x=۵$ در صورت وجود بیابید.

answer

نکته: گاهی فرجه رادیکال، ۳ است. در این صورت باید از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنید. اگر قسمت لاغر (یا چاق) اتحاد داده شده بود، صورت و مخرج را در قسمت چاق (یا لاغر) اتحاد ضرب کنید.

مثال: (مثال کتاب) حد تابع $h(x)=\dfrac{x^{۲}-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}$ را در $x=۸$ در صورت وجود بیابید.

answer

حالا برویم سراغ ارائه چند تعریف که پیش‌نیاز مباحثی است که خواهم گفت!

همسایگی

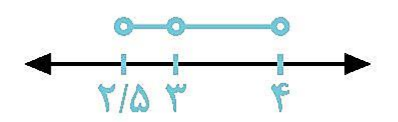
هر بازه باز شامل عدد حقیقی $x_\circ$ را یک همسایگی برای آن عدد می‌نامیم ($x_\circ$ ابتدا و انتهای بازه نباشد و درون بازه باشد.)

مثال: بازه‌های $(\circ,۵)$ و $(\circ,۴)$ یک همسایگی برای عدد ۳ می‌باشند. اما مثلا بازه $[۱,۳]$ ، $(\circ,۳)$ و $(۱,۲)$ همسایگی عدد ۳ نیستند. چون ۳ داخل این بازه‌ها نیست.

همسایگی محذوف

اگر بازه (a,b) یک همسایگی برای $x_\circ$ باشد، مجموعه $(a,b)-\{x_\circ\}$ یک همسایگی محذوف $x_\circ$ نامیده می‌شود.

مثال: مجموعه $(\frac{۵}{۲},۴)-\{۳\}$ یک همسایگی محذوف ۳ است. ببینید:



همسایگی چپ و راست

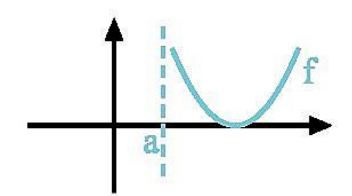
اگر r عددی مثبت باشد، آنگاه بازه $(x_\circ , x_\circ + r)$ یک همسایگی راست و بازه $(x_\circ - r, x_\circ)$ یک همسایگی چپ برای $x_\circ$ به حساب می‌آیند.

مثال: بازه(۵ , ۳) یک همسایگی راست و (۳, ۲/۹) یک همسایگی چپ برای ۳ است.

حد بی‌نهایت

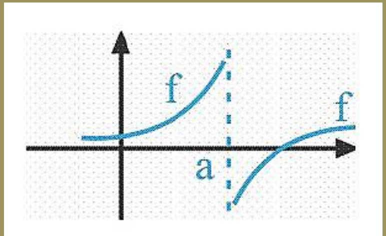
خلاصه عرض کنم که گاهی، وقتی $x \to a$ (یا $x \to a^+$ یا $x \to a^-$) میل می‌کند، مقدار تابع به $-\infty$ یا $+\infty$ میل می‌کند. به نمودارهای زیر توجه کنید:

الف) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$



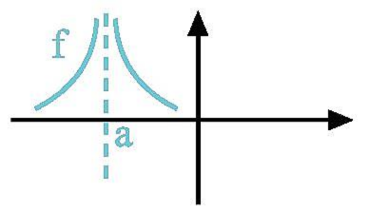
ب)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty \end{cases}$$



پ)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$



نکته: دقت شود که حد در بی‌نهایت، حالت خاصی از عدم وجود حد است.

مثال: (مثال کتاب) نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$ را رسم کنید و به وسیله آن، حد چپ و راست این تابع را در $x=۲$ بیابید.

answer

نکته: حواست باشه که برای تعیین علامت صفر مخرج، گاهی لازم است مخرج را تعیین علامت کنیم.

مثال: (کار در کلاس) حدود زیر را محاسبه کنید.

الف)

answer

$$\lim_{x\to ۵^-} \frac{۲x}{x-۵}$$

ب)

answer

$$\lim_{x\to ۰} \frac{-۱}{x^۲}$$

پ)

answer

$$\lim_{x\to ۳} \frac{۲}{|x-۳|}$$

ت)

answer

$$\lim_{x\to ۱^{+}} \frac{-x-۲}{x^{۲}-۳x+۲}$$

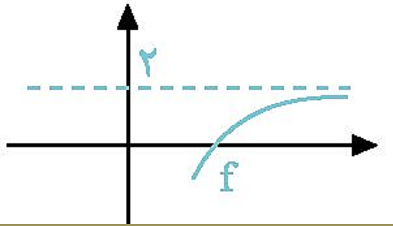
حد در بی‌نهایت

خلاصه عرض کنم، گاهی x به $+\infty$ (انتهای راست محور xها) و یا به $-\infty$ (انتهای چپ محور xها) میل می‌کند. در این حالت باید ببینیم f (همان عرض تابع) به چه عددی میل خواهد کرد.

به نمودارهای زیر دقت کنید:

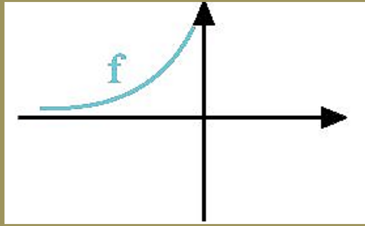
الف)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=۲$$



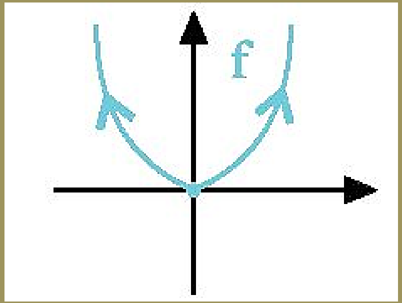
ب)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=۰$$



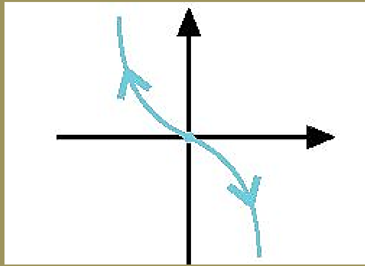
ج)

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\end{cases}$$



د)

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\end{cases}$$



نکته : عدد(غیر صفر) به روی ∞ می‌شود صفر !

هم‌ارزی پرتوان (مهم): اگر $x \to \pm\infty$ ، هر چند جمله‌ای، هم‌ارز (یعنی هم‌ارزش و معادل) جمله‌ای است که بیشترین توان را داراست.

$$-۳x^۳ - ۴x + ۱ \sim -۳x^۳ \qquad ۴x^۲ - ۲x^{۱۰} + ۴ \underset{x\to-\infty}{\sim} -۲x^{۱۰}$$

مثال: (کار در کلاس) مقدار حدود زیر را مشخص کنید.

الف)

answer

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۱-۵t^۲}{t^۲+۳t}$$

ب)

answer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{۲-۳x}$$

مثال: (کار در کلاس کتاب) حدود زیر را محاسبه کنید.

الف)

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{۲x^{۳}+۷x^{۳}-۲x-۹}{۳x^{۲}-۸x+۱}$$

ب)

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{۵x+۴}{x^{۳}+x-۸}$$

ج)

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{-۴x^{۷}+۵x^{۲}}{۲x^{۳}+۹}$$

۱- (تمرین کتاب) نشان دهید چند جمله‌ای $f(x)=۲x^{۳}+x^{۲}+۱$ بر دو جمله‌ای $x+۱$ بخش‌پذیر است.
سپس به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

answer

۲- (تمرین کتاب) حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف)

$$\lim_{x \to ۵} \frac{x^۳ - ۴x^۲ - ۴x - ۵}{x^۲ - ۲۵}$$

ب)

$$\lim_{x \to -۴} \frac{x^۲ + ۳x - ۴}{x^۳ + ۴x^۲ + x + ۴}$$

۳- (تمرین کتاب) حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف)

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{۲x-۱}}{x^{۲}-x}$$

ب)

$$\lim_{x\to -۸} \frac{۲x+۱۶}{\sqrt[۳]{x}+۲}$$

۴- (تمرین کتاب) حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۰^+} \dfrac{۱}{x}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{-۱}{|x|}$

پ) $\lim\limits_{x \to ۱^-} \dfrac{۱}{x-۱}$

ت) $\lim\limits_{x \to -۶} \dfrac{۹}{(x+۶)^۲}$

ث)

$$\lim_{x \to ۳^+} \frac{۱ - ۵x}{x^۲ - ۹}$$

ج)

$$\lim_{x \to (-۲)^-} \frac{-۳x}{x^۲ - ۴}$$

چ)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{۱}{\cos x}$$

ح)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{٢}^-} \tan x$$

خ)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{٢}^+} \tan x$$

د)

$$\lim_{x \to ٣^-} \frac{[x] - ٣}{x - ٣}$$

۵- (تمرین کتاب) نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

الف)

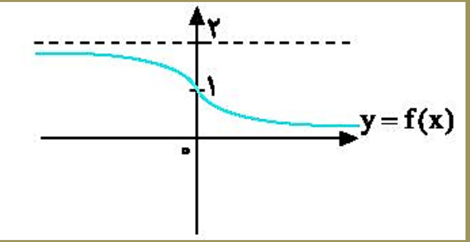
$$f(x)=\frac{۱}{x} \quad : \lim_{x\to -\infty} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x), \lim_{x\to ۰} f(x)$$

ب)

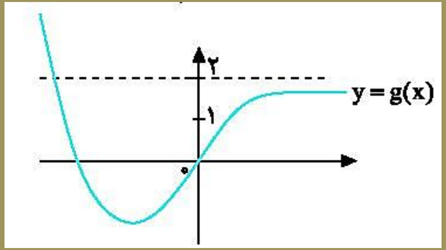
$$g(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases} \quad : \lim_{x\to -\infty} g(x), \lim_{x\to +\infty} g(x)$$

۶- (تمرین کتاب) با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.

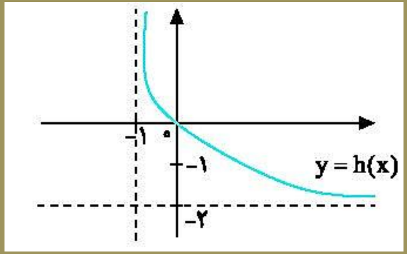
الف)



ب)



پ)



۱- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

۲- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

۳- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

۴- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

۵- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

۶- $\lim\limits_{x \to (-۱)^{+}} h(x)$

۷- (تمرین کتاب) نمودار تابع f به شکل زیر است. حدود خواسته شده را بنویسید.

الف) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

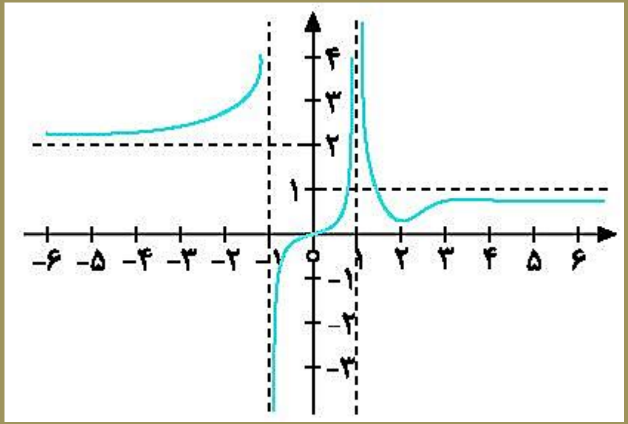
ب) $\lim_{x\to (-۱)^-} f(x)$

پ) $\lim_{x\to (-۱)^+} f(x)$

ت) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$

ث) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$

ج) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$



۸- (تمرین کتاب) حدود زیر را محاسبه کنید.

الف)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{۱}{۲x - ۳}$$

ب)

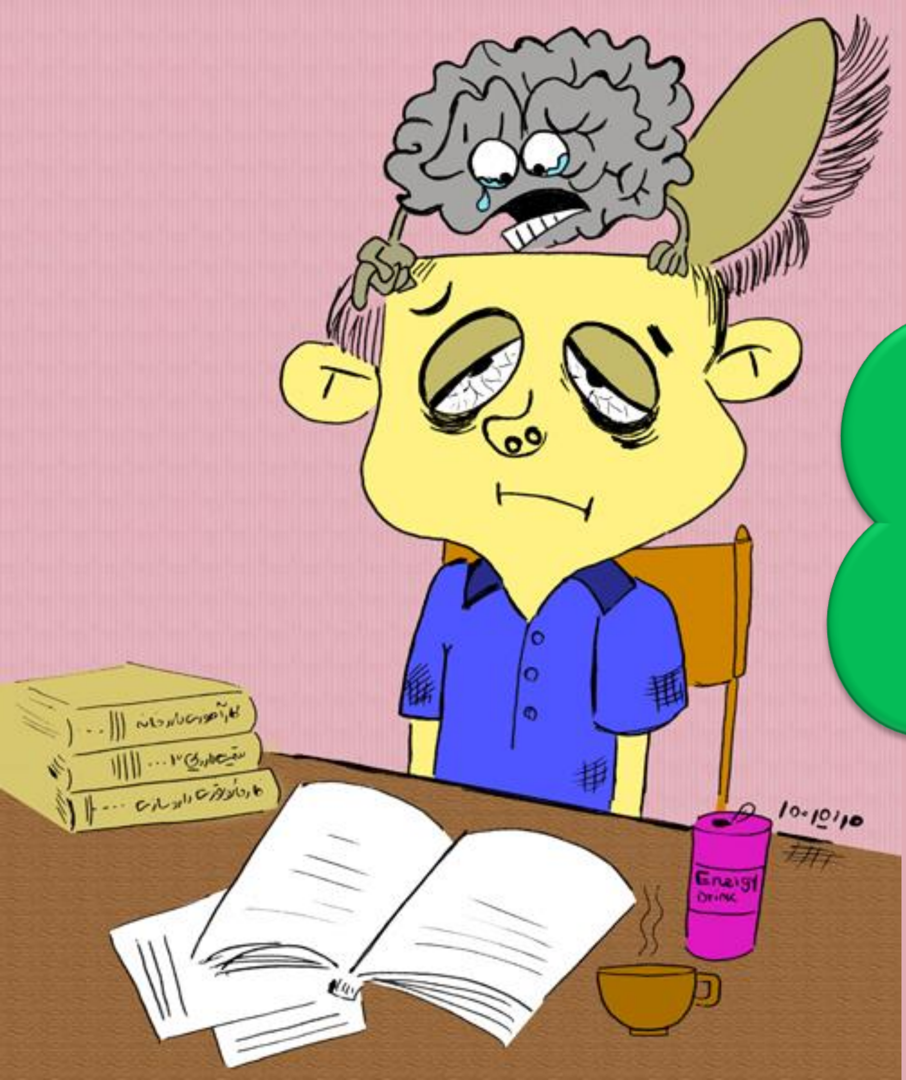
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{۳ + \frac{۱}{x^{۲}}}{\frac{۴}{x} - ۵}$$

پ)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{۲x^{۲} - ۳x + ۱}{x^{۲} + ۲x - ۳}$$

ت)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{۲x^{۵} - ۶x^{۳} - x}{x^{۲} - ۵x + ۱}$$

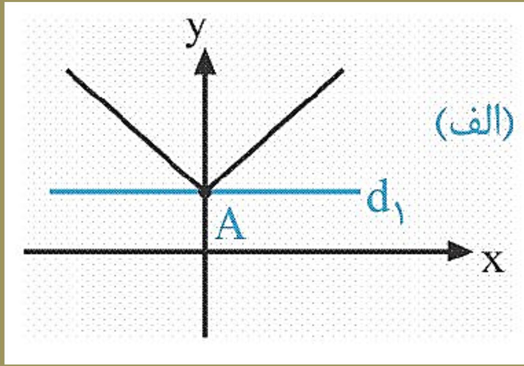


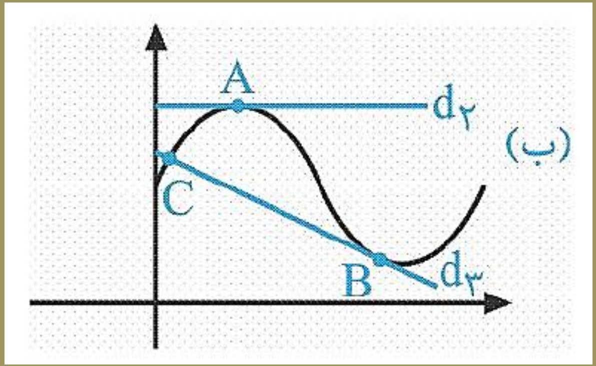
فصل ۴ :

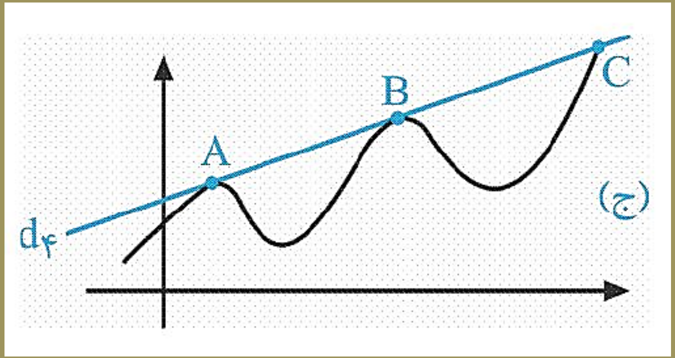
مشتق

خط مماس بر یک منحنی به روایت تصویر!

به سه شکل زیر دقت کنید. در شکل الف، خط d_1 بر منحنی در A مماس نیست. در شکل ب، خط d_2 در A و خط d_3 در B بر منحنی مماس است. در همین شکل اما، خط d_3 در C بر منحنی مماس نیست، متقاطعند! در شکل ج، خط d_4 در نقاط A و B بر منحنی مماس است. اما در C مماس نیست، متقاطعند!







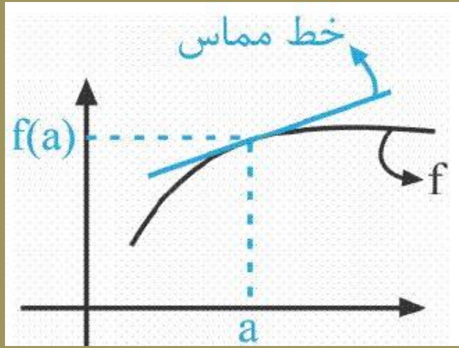
مشتق تابع f در نقطه $A(a, f(a))$

مشتق تابع **f** در نقطه $x = a$ را با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهند، که برابر است با:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right)$$

نکته: زمانی f' در $x = a$ تعریف می‌شود که حد فوق موجود و متناهی باشد.

نکته: مشتق تابع **f** در $x = a$ برابر است با:



شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه A

مثال: (مثال کتاب) معادله خط مماس بر منحنی $y=-x^2+10x$ را در نقطه‌ای به طول $x=2$ واقع بر منحنی بیابید.

answer

تعریف دیگر برای مشتق f در $x = a$

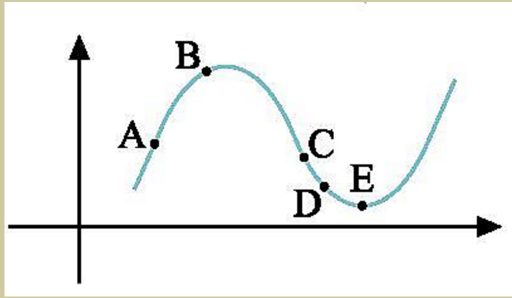
می‌شود: $\Leftarrow$ $\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$

در صورتی که حد گفته شده موجود و متناهی باشد، مشتق **f** در **a** وجود خواهد داشت.

نکته: هیچ تفاوتی بین ۲ تعریف گفته شده وجود ندارد و استفاده از هر کدام، دلخواه است.

نکته: علامت مشتق (یا همان شیب خط مماس) با وضعیت یکنوایی تابع، به این صورت در ارتباط است که اگر در نقطه داده شده، تابع در حال صعود بود، $f' > 0$ ، اگر در حال نزول بود $f' < 0$ و اگر در نوک قله یا قعر نمودار بود، مقدار f' برابر صفر است.

مثال: فرض کنید شیب نقاط مشخص شده در منحنی زیر، ۵- ، ۱- ، ۰ ، ۲ ، ۴ هستند. مشخص کنید کدام شیب مربوط به کدام نقطه است؟



answer

مشتق چپ و راست f در $x = a$

مشتق چپ و راست تابع **f** در $x = a$ را با نمادهای $f'_-(a)$ و $f'_+(a)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شروط مشتق‌پذیری f در $x = a$

مشتق‌پزیری **f** در $x = a$ ، ۲ شرط لازم دارد:

۱- **f** در $x = a$ پیوسته باشد.

۲- شیب نیم‌مماس‌های چپ و راست برابر باشند. یعنی $f'_-(a) = f'_+(a)$

مثال: (مثال کتاب) مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\left|x^{۲}-۱\right|$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

answer

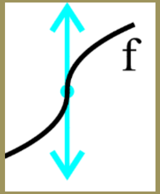
مثال: (مثال کتاب) مشتق‌پذیری توابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=\sqrt{x}$ را در صفر بررسی کنید.

answer

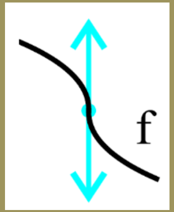
مماس قائم

اگر f در $x=a$ پیوسته باشد و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ شوند، f در a مشتق‌پذیر نیست، اما خط مماس در این نقطه موجود است، که به آن مماس قائم می‌گویند.

$f'_-(a)=f'_+(a)=+\infty$ (مثبت شد چون صعودی است)



$f'_-(a)=f'_+(a)=-\infty$ (منفی شد چون نزولی است)



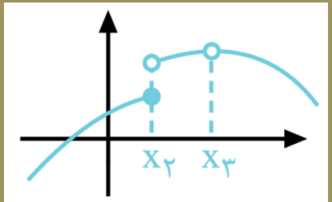
مثال: (مثال کتاب) آیا تابع $y=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$ دارای خط مماس است؟

answer

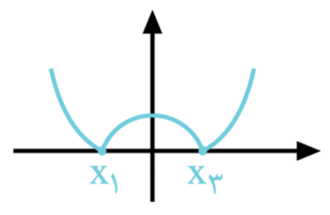
مثال: آیا تابع $y=\sqrt[3]{x^2}$ در $x=0$ دارای خط مماس است؟

answer

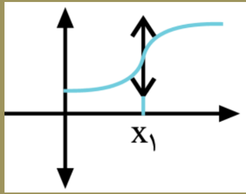
در نمودار یک تابع، نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق‌ناپذیر است عبارتند از:



۱- نقاط ناپیوستگی: مثلا نقاط x_2 و x_3 در نمودار مقابل $\Leftarrow$



۲- نقاط تیزی (زاویه‌دار) : مثلا x_1 و x_3 در نمودار مقابل $\Leftarrow$



۳- نقاطی که در آن‌ها مماس قائم تولید می‌شود: مثلا x_1 در دو نمودار مقابل $\Leftarrow$

تابع مشتق $(f'(x))$

برابر است با $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ مشروط بر آن که این حد موجود باشد. مجموعه تمام نقاط از دامنه **f** که f' برای آن‌ها موجود باشد را $D_{f'}$ می‌گوییم.

مثال (مثال کتاب) اگر $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x}}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. سپس $\mathbf{f'(3)}$ را بیابید.

مشتق گیری! (صفر تا صد)

چند فرمول مشتق‌گیری مشتی ببینیم صفا کنیم!

۱ $y=a\,(a\in\mathbb{R}) \rightarrow y'=0$

۲ $y=ax \rightarrow y'=a$

۳ $y=a\Delta^{n} \rightarrow y'=an(\Delta)^{n-1}.\Delta'$

رمز

- نما در ضریب ضرب میشه!
- یکی از نما کم میشه!
- در مشتق پایه ضرب میشه!

ex $y=\dfrac{1}{5}(-5x)^{12}$

ex $y=\dfrac{-2}{x^{4}}$

۴ $y=f\pm g\pm\ldots \rightarrow y'=f'\pm g'\pm\ldots$

۵ $y=f.g \rightarrow y'=f'.g+g'.f$

ex $y=\dfrac{6}{x^{3}}-x^{2}\sqrt[3]{x}+4x$

۶ $y=\sqrt{\Delta} \rightarrow y'=\frac{\Delta'}{۲\sqrt{\Delta}}$

۷ $y=\frac{f}{g} \rightarrow y'=\frac{f'g-g'f}{g^{۲}}$

ex $y=\frac{(۲x-۱)\sqrt{x}}{x^{۳}}$

۸ $y=\frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^{۲}}$

۹ $y=\frac{۱}{U} \rightarrow y=\frac{-U'}{U^{۲}}$

ex if $f(x)=(\frac{۲x-۱}{۲+۳x})^{۲}\frac{۱}{x} \rightarrow f'(۱)=?$

مشتق تابع مرکب

بخوانید : مشتقِ داخلش در اِف پریمِ داخلش! تمام :

$$y=f(\Delta) \longrightarrow y=\Delta'.f'(\Delta)$$

اگر $f(x)=\frac{x^{3}-2}{1+x^{3}}$ و $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$ ، حاصل $f'(g(x))\times g'(x)$ کدام است؟ (کنکور۹۲)

۱) $\frac{3}{x}$ ۲) $\frac{3}{x^{2}}$ ۳) $\frac{1}{3x}$ ۴) $\frac{x-3}{x^{3}}$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{-۲x}$ و $g(x)=(۲x+۱)^۲$ ، آنگاه مشتق تابع $gof(x)$ در $x=-۲$ را با استفاده از قاعده زنجیری به دست بیاورید.

answer

مثال: (کار در کلاس) مشتق‌های توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=(x^{۲}+۱)^{۳}(۵x-۱)$

ب) $g(x)=\left(\frac{-۳x-۱}{x^{۲}+۵}\right)^{۸}$

answer

مشتق‌پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر است هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد. همچنین تابع f روی بازه $[a,b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه در بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد، در a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

نکته (کار در کلاس) تابع f روی $[a,b)$ $((a,b])$ مشتق‌پذیر است هرگاه در (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در a مشتق راست (در b مشتق چپ) داشته باشد.

مثال : (مثال کتاب) نمودار $f(x)=\begin{cases} x^۲ & -۲\le x\le ۱ \\ x+۱ & x>۱ \end{cases}$ را رسم کنید و مشتق‌پذیری آن را روی بازه‌های

$[-۲,۱]$ ، $(۱,+\infty)$ و $[۱,۲]$ بررسی کنید.

answer

مشتق مرتبه دوم

اگر تابع مشتق، مشتق‌پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y=f(x)$ را به صورت $y''=f''(x)$ (خوانده شود ایگرگ زِگوند) می‌نویسیم و برای محاسبه آن از تابع y' مشتق می‌گیریم.

مثال: (مثال کتاب) اگر $\mathbf{y=3x^4+2x^2-1}$، آنگاه تابع y' و $\mathbf{y''}$ را بیابید.

answer

مثال: (مثال کتاب با تغییر) رابطه $h(t) = -5t^2 + 40t$ ، ارتفاع جسم $(h(t))$ را t ثانیه پس از پرتاب از سطح زمین نشان می‌دهد.

الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی $[0,2]$ را بر حسب $\frac{m}{s}$ به دست آورید.

ب) سرعت لحظه‌ای جسم در لحظه $t = 2$ چقدر است؟

ج) جسم چند ثانیه پس از پرتاب، به نقطه اوج می‌رسد؟

answer

کاربردی دیگر از آهنگ تغییرات تابع: آهنگ رشد

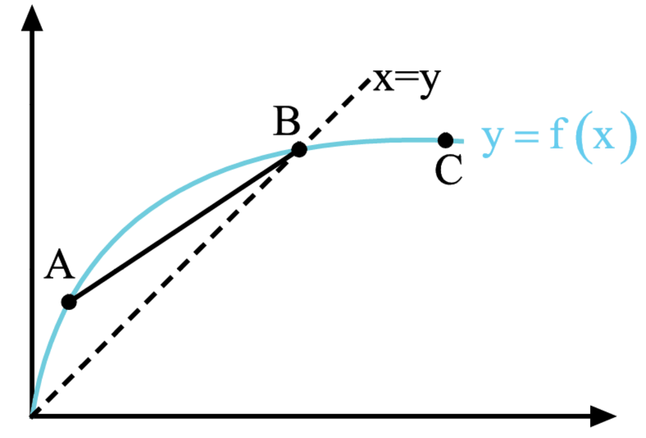
مثال: (مثال کتاب) تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ قد متوسط کودکان را xماه پس از تولد، بر حسب $\frac{cm}{month}$ مشخص می‌کند. آهنگ متوسط رشد یک کودک را از ۱ ماهگی تا ۳۶ ماهگی بیابید.

answer

۱- (تمرین کتاب) اگر $f(x)=۳x^{۲}-۲x+۱$ ، $f'(۲)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

answer

۲- (تمرین کتاب) برای نمودار $y=f(x)$ ، شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A $\leftarrow m_1$

ب) شیب نمودار در نقطه B $\leftarrow m_2$

پ) شیب نمودار در نقطه C $\leftarrow m_3$

ت) شیب خط AB $\leftarrow m_4$

ث) شیب خط $\leftarrow m_5$

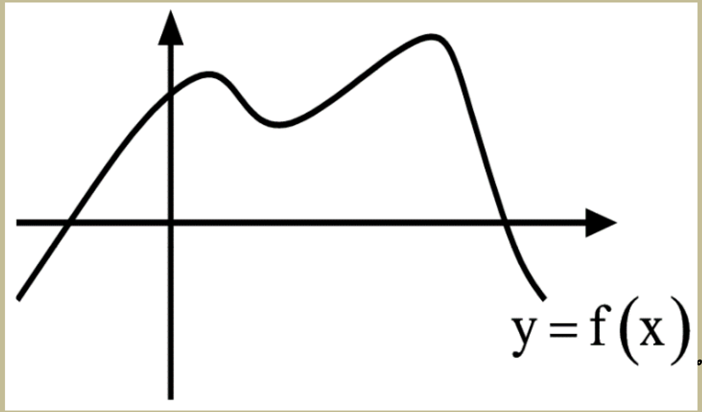
ج) شیب خط $\leftarrow m_6$

۳- (تمرین کتاب) نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و Gرا روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که:

الف) Aنقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) Bنقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) Cنقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آن‌جا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

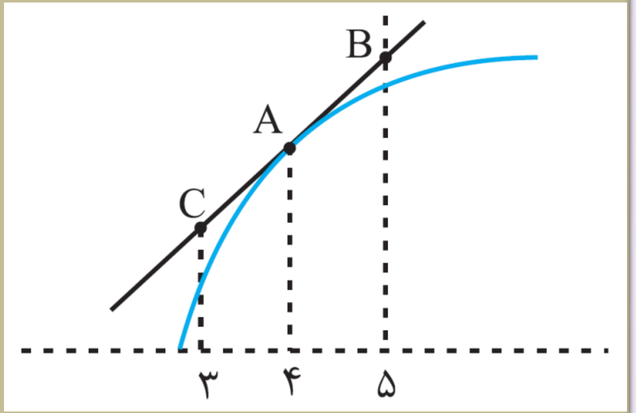


ت) Dنقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آن‌جا صفر است.

ث) نقاط E و F، نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

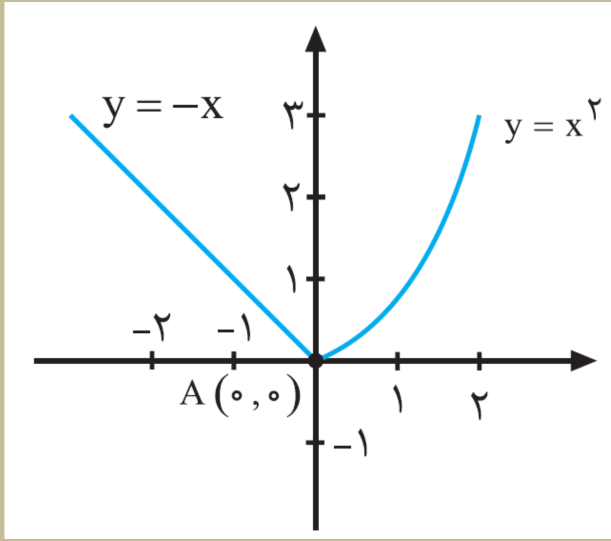
ج) Gنقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آن‌جا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

۵- (تمرین کتاب) برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۵$. با توجه به شکل، مختصات نقاط A و B و C را بیابید.



answer

۶- (تمرین کتاب) با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع داده شده در نقطه A، نشان دهید که این تابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیست.



answer

۸- (تمرین کتاب) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن:

الف) در یک نقطه برابر صفر شود. ب) در $\mathbf{x = ۲}$ برابر ۳ شود. پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

ت) در تمام نقاط یکسان باشد. ث) در تمام نقاط منفی باشد.

answer

۹- (تمرین کتاب) مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۳ & x\geq ۱ \\ ۲x & x<۱ \end{cases}$ را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید.

answer

۱۰- (تمرین کتاب) اگر $f(x)=\left|x^{۲}-۴\right|$ ، به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاطی به طول‌های ۲ و ۲- بررسی کنید.

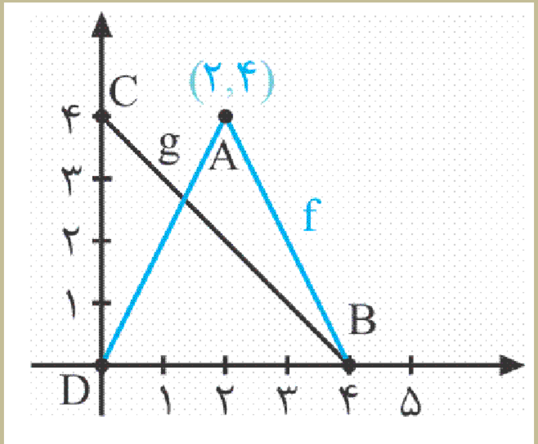
answer

۱۲- (تمرین کتاب) اگر $f'(1)=3$ و $g'(1)=5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$.

answer

۱۳- (تمرین کتاب) نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

اگر $h(x)=f(x).g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$ و $h'(۲)$ ، $h'(۳)$.



۱۴- (تمرین کتاب) اگر $f(x)=\begin{cases} x^{2} & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ ، نشان دهید $f'_{+}(0)$ و $f'_{-}(0)$ موجودند ولی مشتق موجود نیست.

answer

۱۵- (تمرین کتاب) مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x) = (\sqrt{۳x + ۲})(x^{۳} + ۱)$

answer

ب) $f(x)=\dfrac{x^{٢}-٣x+١}{-٣x+٢}$

answer

۱۷- (تمرین کتاب) معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^۲-t+۱۰$ بر حسب متر در بازه زمانی $[۰,۵]$ داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[۰,۵]$ با هم برابرند؟

answer

۲۰- (تمرین کتاب) گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم

مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=40(1-\frac{t}{100})^2$ به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0,1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ می‌شود؟

فصل ۵ :
کاربرد مشتق

آزمون یکنوایی توابع

برای تابع مشتق‌پذیر f داریم:

الف) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیدا صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیدا نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

مثال: (مثال کتاب) تابع $f(x)=x^{۳}-۳x$ در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید است؟

answer

اکسترمم‌های نسبی توابع

نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی یک تابع را نقاط اکسترمم نسبی آن تابع می‌گویند.

ماکزیمم نسبی: نقطه $A \in D_f$ ، نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است، هرگاه یک همسایگی اطراف A وجود داشته باشد، به طوری که عرض A از عرض تمام نقاط همسایگی بیشتر یا مساوی باشد. مقدار ماکزیمم نسبی، همان مقدار عرض این نقطه است.

مینیمم نسبی: نقطه $A \in D_f$ نقطه مینیمم نسبی تابع f است، هرگاه یک همسایگی اطراف A وجود داشته باشد، به طوری که عرض A از عرض نقاط همسایگی کمتر یا مساوی باشد. مقدار ماکزیمم نسبی، همان مقدار عرض این نقطه است.

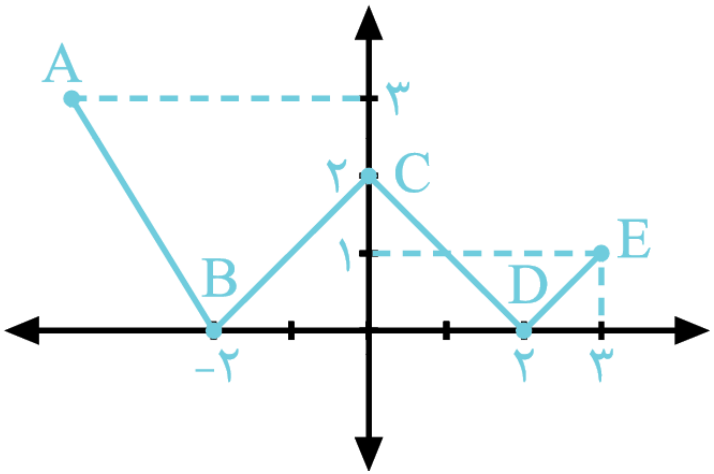
نکته: وجود همسایگی (هم چپ، هم راست) برای این که یک نقطه اکسترمم نسبی شود، شرطی لازم است.

(یعنی مثلا نقاط ابتدا و انتهای یک بازه هیچ وقت نمی‌تونن اکسترمم نسبی بشن)

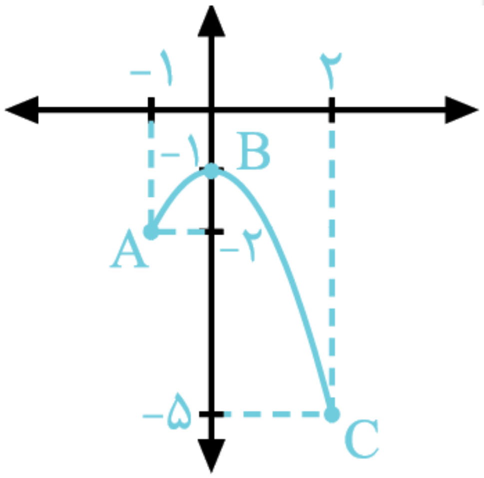
نکته: برای اکسترمم نسبی شدن یک نقطه، نه پیوستگی اهمیت دارد نه مشتق‌پذیری!

مثال: (کار در کلاس) برای نقاط مشخص شده در هر یک از توابع زیر، نوع اکسترمم نسبی، مقدار اکسترمم نسبی و مقدار مشتق را در آن نقطه محاسبه کنید.

الف) $f(x) = ||x| - ۲|; x \in [-۵,۳]$



ب) $g(x) = -x^{۲} - ۱ ; x \in [-۱, ۲]$



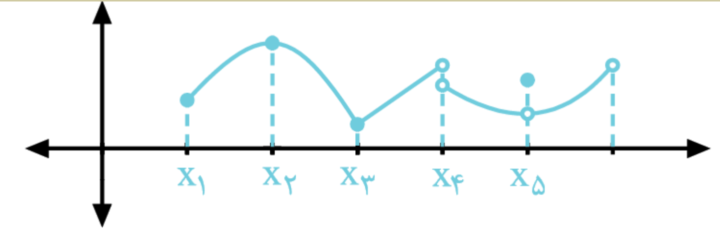
answer

نکته: نقاط روی توابع ثابت (به شرط وجود همسایگی) هم maxنسبی به حساب می‌آیند هم minنسبی.

نقطه بحرانی تابع

فرض کنید $c \in D_f$ در این صورت cیک نقطه بحرانی fاست، هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

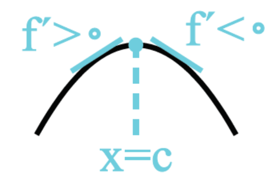
مثال: کدام یک از نقاط مشخص شده در نمودار زیر بحرانی‌اند، کدام نیستند؟ (با ذکر دلیل)



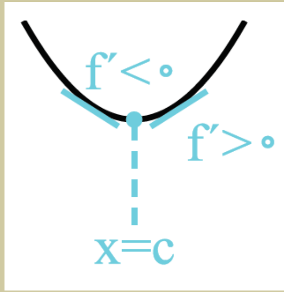
قضیه فِرما: اگر تابع f در نقطه‌ای به طول c اکسترمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c)=0$ است.

نتیجه: هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی f، حتما بحرانی نیز هست، اما هر نقطه‌ی بحرانی، اکسترمم نسبی نیست.

آزمون مشتق اول

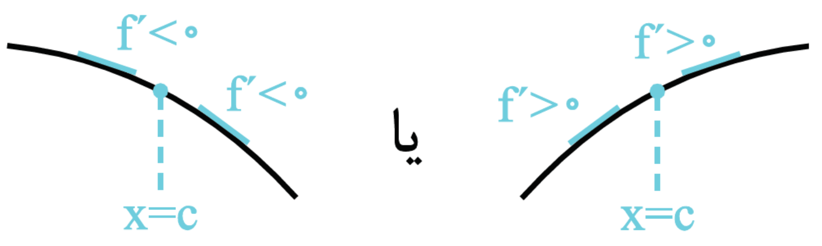


الف) اگر علامت f' قبل از $x=c$ مثبت و بعد از آن منفی باشد، آنگاه **c** طول max نسبی **f** است.



ب) اگر علامت f' قبل از $x=c$ منفی و بعد از آن مثبت باشد، آنگاه **c** طول min نسبی **f** است.

پ) اگر علامت f' قبل و بعد از $x=c$ تغییر نکند، آنگاه **c**، نه طول min نسبی **f** است نه طول max نسبی آن.



مثال: با استفاده از آزمون مشتق اول، نقاط اکسترمم نسبی و مقادیر آن‌ها را برای تابع $f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x-۱$ به دست آورید.

answer

اکسترمم مطلق توابع

به $\max$ و $\min$ مطلق توابع، اکسترمم مطلق آن‌ها می‌گوییم.

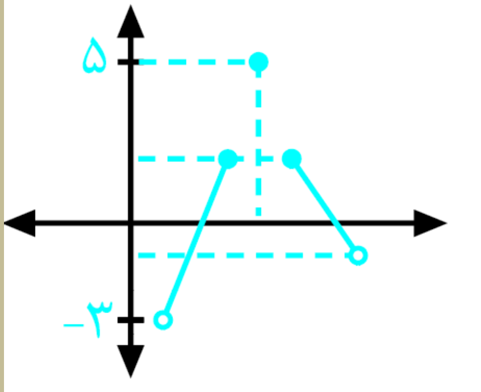
ماکزیمم مطلق: با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c, f(c))$ یک نقطه $\max$ مطلق برای تابع f است، هرگاه عرض این نقطه از عرض تمام نقاط دامنه f بیشتر یا مساوی باشد. مقدار $\max$ مطلق همان مقدار عرض این نقطه، یعنی $f(c)$ است.

مینیمم مطلق: با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c, f(c))$ یک نقطه $\min$ مطلق برای تابع **f** است، هرگاه عرض این نقطه از عرض تمام نقاط دامنه **f** کمتر یا مساوی باشد. مقدار $\min$ مطلق همان مقدار عرض این نقطه یعنی $f(c)$ است.

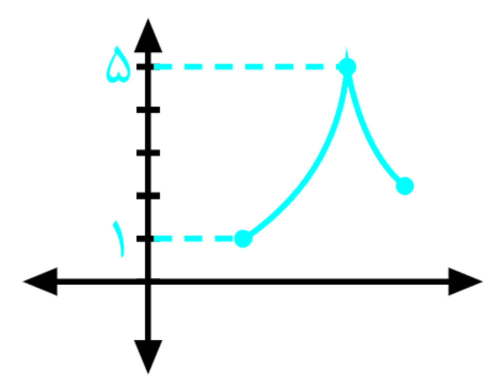
نکته: وجود همسایگی برای این که یک نقطه اکسترمم مطلق شود، نه شرط لازم است نه کافی! یعنی اصلا وجود همسایگی این جا مهم نیست! برخلاف اکسترمم‌های نسبی که وجود همسایگی واسشون شرط لازم بودن.

مثال: در هر مورد از نمودارهای زیر، مقادیر و مطلق را بیابید.

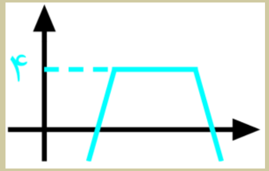
الف



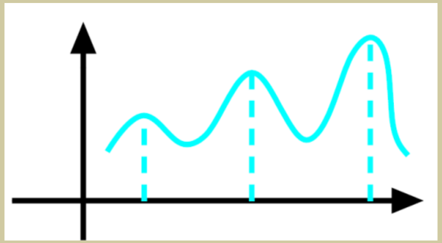
ب)



نکته: یک تابع می‌تواند در بی‌نهایت نقطه دارای اکسترمم مطلق باشد، اما مقدار آن‌ها یکتاست.

مانند 

که بی‌شمار نقطه max مطلقند و مقدار آن‌ها ۴ است. اما یک تابع می‌تواند بی‌شمار نقطه اکسترمم نسبی با مقادیر مختلف داشته باشد. مانند



قضیه: فرض کنید f در $[a,b]$ پیوسته باشد. در این صورت در این بازه هم max مطلق دارد هم مطلق.

مثال (فعالیت کتاب) آیا تابع $y=\left|x^{۲}-۱\right|$ در $[-۲,۳]$ دارای اکسترمم مطلق است؟ در صورت وجود با رسم نمودار مقادیر آن‌ها را بیابید.

answer

روش محاسبه اکسترمم‌های مطلق تابع f در بازه بسته $[a,b]$

گام اول: مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی f را می‌یابیم.

گام دوم: مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی محاسبه می‌کنیم.

گام سوم: در گام دوم، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار $\max$ مطلق و کوچک‌ترین آن‌ها، $\min$ مطلق.

مثال: (مثال کتاب) نقاط اکسترمم مطلق تابع $\mathbf{f(x)=2x^3+3x^2-12x}$ را در بازه $[-1,3]$ تعیین کنید.

بهینه‌سازی یا optimization

یعنی پیدا کردنِ بهترین حالت! مثلِ کمترین مقدار برای زمان، هزینه، فاصله یا بیشترین مقدار برای سود مساحت یا حجم! مسائل بهینه‌سازی معمولا با **بیانِ فارسی** و **کلمات کمترین یا بیشترین** همراهند!

روش حل مسائل بهینه‌سازی

با استفاده از رمز **نَفتَم** !!

۱ **نَ : نمادگذاری** رسم شکل(در صورت نیاز) و قرار دادن معلوم‌ها و نمادهای مجهولات ← y و x

۲ **ف : f** ضابطه‌ی تابعی که قرار است بهینه شود را بنویسید!

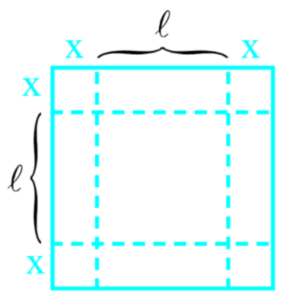
۳ **ت : تک‌متغیرش کن!** اگه اِف دومتغیره بود، تک‌متغیرش کن!(با استفاده از یه رابطه از دل سوال!)

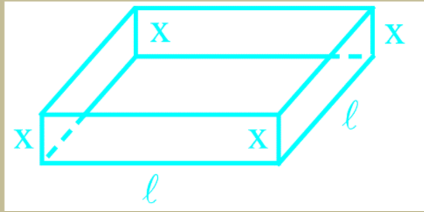
۴ **م : max–min** عرض اکسترمم(حالا یا ماکزیمم یا مینیمم) تابع تک‌متغیره رو بدست بیارا!

مثال: (مثال کتاب) نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن با هم برابر باشند.

answer

مثال (مثال کتاب) مطابق شکل، ورقی فلزی به طول ۳۰cm را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از ۴ گوشه آن مربع‌هایی کوچک به ضلع X را برش بزنیم و سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین‌ها، جعبه‌ای در باز بسازیم. مقدار X چقدر باشد تا حجم قوطی حداکثر شود؟





۱- (تمرین کتاب) بزرگ‌ترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x)=x^{3}-12x+4$ در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟ چرا؟

answer

۲- (تمرین کتاب) با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x) = \frac{۱}{x^۲ + ۱}$ ، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید است؟

answer

۳- (تمرین کتاب) نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{۴ - x^{۲}}$

answer

ب) $g(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} - ۴$

answer

پ) $h(x) = \sqrt[۳]{x}$

answer

۴- (تمرین کتاب) در تابع زیر ابتدا نقاط بحرانی را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$$f(x)=x^{۳}+۳x^{۲}-۹x-۱۰$$

answer

۵- (تمرین کتاب) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع زیر را در بازه‌های مشخص شده، در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x) = -۲x^{۳} + ۹x^{۲} - ۱۳ \quad ; \quad x \in [-۱,۲]$$

answer

۶- (تمرین کتاب) اگر نقطه $(۲,۱)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^{۳}+bx^{۲}+d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

answer

۸- (تمرین کتاب) الف) می‌خواهیم کنار رودخانه، یک محوطه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟ ب) بدون استفاده از مشتق نیز، این مساله را حل کنید.

answer

۹- (تمرین کتاب) هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت۳۲ خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایین هر صفحه۲ و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

answer

فصل ۶ :
هندسه

دوران حول محور

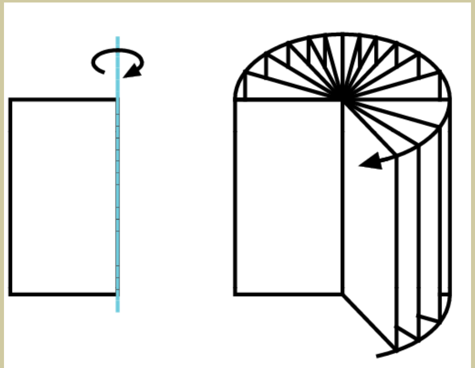
وقتی شکل‌های هندسی متفاوت، حول یک محور دوران داده شوند، جسم‌های مختلف هندسی ساخته می‌شوند.

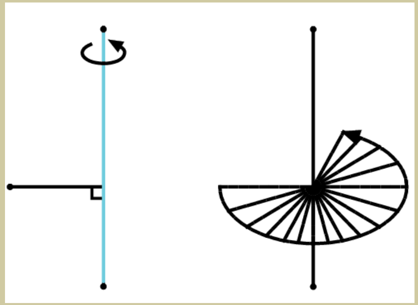
مثال زیر را ببینید.

مثال (فعالیت کتاب)

الف) شکل حاصل از دوران یک مستطیل، حول طول یا عرض آن،

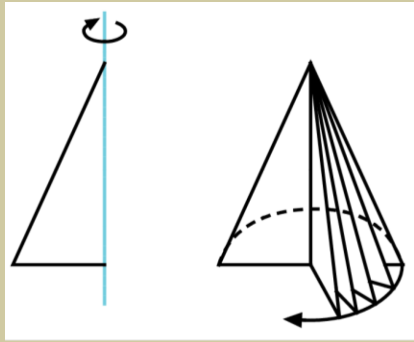
یک استوانه است.





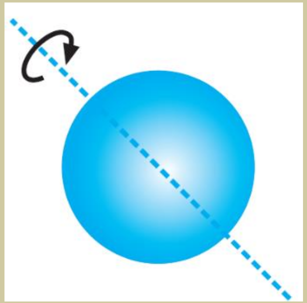
ب) شکل حاصل از دوران یک پاره‌خط، حول پاره‌خط دیگری که بر آن عمود است،

یک دایره است.



پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه،

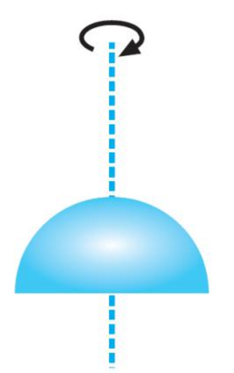
یک مخروط است.



ت) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطرهای آن،

یک کره است.

ث) شکل حاصل از دوران یک نیم‌دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن، یک نیم‌کره است.



برش

از دوران شکل حول یک محور، یک جسم دو بعدی یا سه بعدی تشکیل می‌شود. حالا فرض کنید می‌خواهیم اجسام سه بعدی را برش بزنیم و تغییرات آن‌ها را بعد از برش تجسم کنیم. ابتدا یک تعریف!

سطح مقطع

شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع آن جسم نامیده می‌شود.

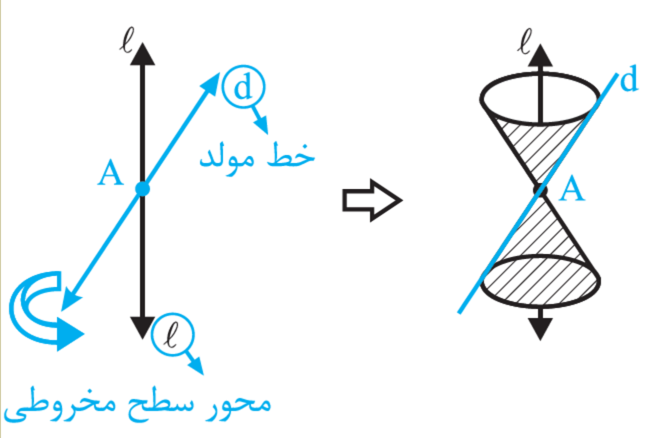
مثال: (فعالیت کتاب) سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟ در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت ممکن را دارد؟

answer

آشنایی با مقاطع مخروطی

دو خط d و ℓ در نقطه‌ای مانند A متقاطعند. اگر d را حول ℓ دوران کامل دهیم، شکل حاصل یک سطح مخروطی است.

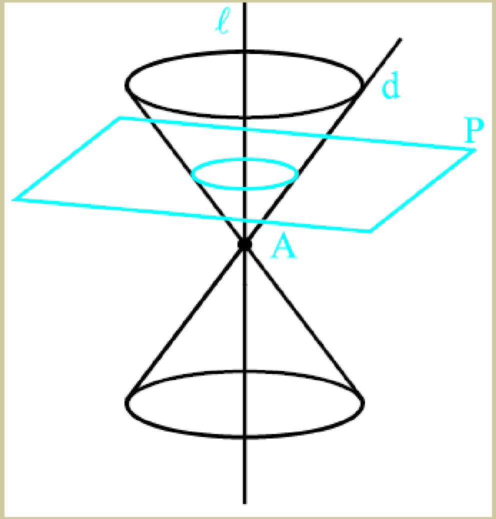
(انگار دو تا نون بستنی قیفی رو از نوک (A) بهم چسبوندیم!)



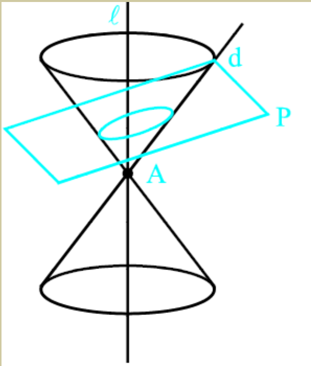
مقاطع مخروطی

وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده می‌شود، معمولا سطح مقطع، یک منحنی است. از آن‌جا که این منحنی‌ها، حاصل تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، مقاطع مخروطی نامیده می‌شوند. بسته به میزان انحراف صفحه برش دهنده نسبت به محور سطح مخروطی، حالات زیر پدید می‌آید:

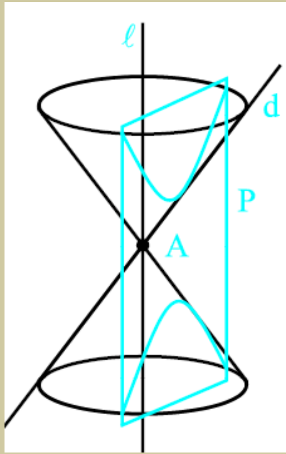
الف) اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن A عبور نکند، شکل حاصل یک دایره خواهد بود.



ب) اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با خط مولد سطح مخروطی d موازی نشود و و از رأس نگذرد، شکل حاصل بیضی خواهد بود.

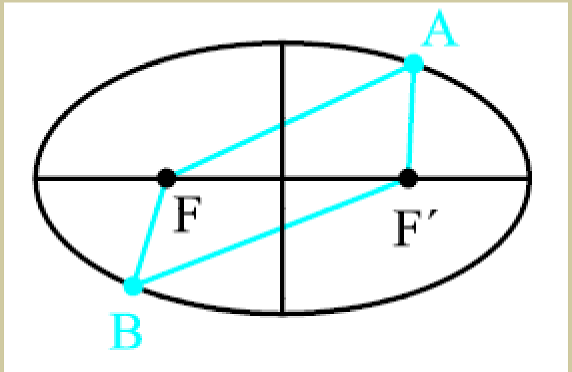


پ) اگر صفحه P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی d موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک سهمی خواهد بود. و اگر این صفحه هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی سطح مخروطی را قطع کند و از راس **عبور نکند** شکل حاصل هذلولی است



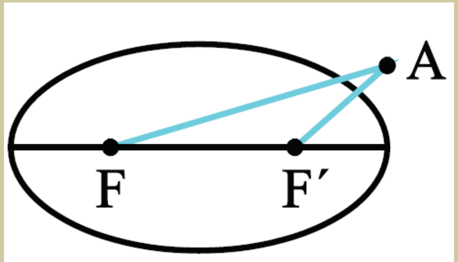
بیضی

مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت (کانون‌های بیضی) همواره برابر مقداری ثابت است.

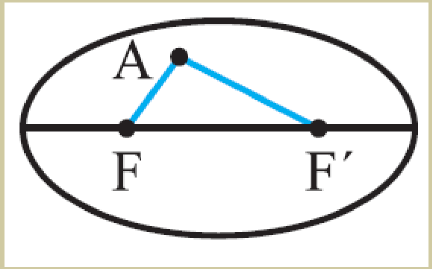


بیضی

حواستان باشد، اگر نقطه دلخواه A بیرون بیضی باشد، مجموع فواصل آن از نقاط F و F' بیشتر از ℓ خواهد شد $\Leftarrow$ $\Rightarrow AF + AF' > \ell$



و اگر A درون بیضی باشد، مجموع فواصل آن از F و F' ، کمتر از ℓ خواهد شد.

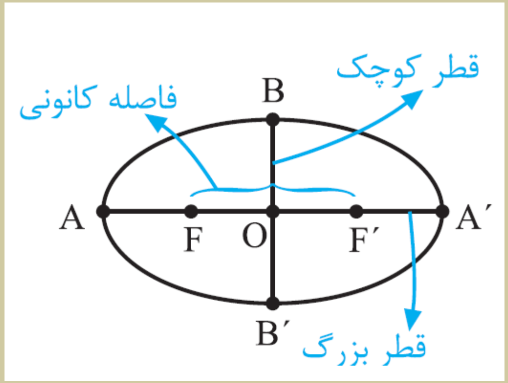


$$\Rightarrow AF + AF' < \ell$$

نام‌گذاری‌ها در بیضی

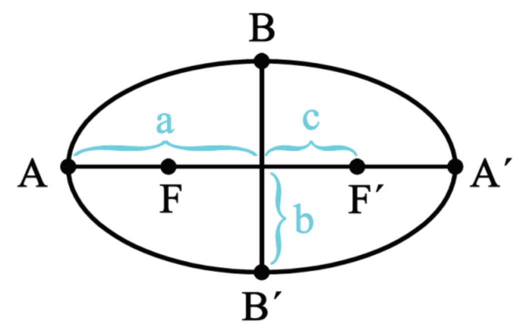
بیضی مقابل را در نظر بگیرید:

در این بیضی کانون‌ها را F و F' می‌نامیم. در هر بیضی، اندازه FF' ، فاصله کانونی بیضی نامیده می‌شود. نقطه میانی پاره‌خط FF' ، مرکز بیضی است که آن را O می‌نامیم. پاره‌خطی که از کانون‌های بیضی می‌گذرد، یعنی AA' ، قطر بزرگ یا قطر کانونی است. پاره‌خطی که در مرکز بیضی بر قطر بزرگ عمود است، یعنی قطر BB' ، قطر کوچک بیضی نامیده می‌شود. نقطه O وسط قطرهای بزرگ و کوچک بیضی هم هست.



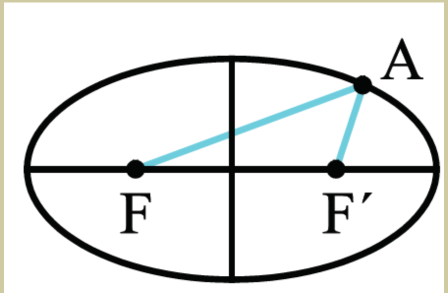
نکته: اگر قطر بزرگ بیضی افقی باشد، آن بیضی را بیضی افقی () و اگر قطر بزرگ عمودی باشد، بیضی را بیضی قائم () می‌نامیم.

نکته: فاصله کانونی بیضی برابر $2c$ ($|FF'|=2c$)، طول قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ ($|AA'|=2a$) و طول قطر کوچک بیضی برابر $2b$ ($|BB'|=2b$) است.



ارتباط بین a و b و c: در هر بیضی داریم: $\boxed{a^2=b^2+c^2}$

نکته: گفتیم در بیضی مجموع فواصل هر نقطه روی آن از دو کانون، برابر مقدار ثابتی است آن مقدار ثابت، همان طول قطر بزرگ بیضی (۲a) می‌باشد.



$$\Rightarrow AF + AF' = ۲a$$

مثال (کار در کلاس) در یک بیضی افقی، طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(4,5)$ باشد،

الف) فاصله کانونی بیضی را بیابید. ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون‌ها.

answer

طریقه تشخیص بیضی افقی و قائم

فرض کنید مختصات مرکز بیضی $O\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ است. اگر عرض نقاط A ، A' ، F و F' بشود β و طول نقاط B و B' بشود α ، بیضی افقی است. اما اگر طول نقاط A ، A' ، F و F' بشود α و عرض نقاط B و B' بشود β ، بیضی قائم است.

خروج از مرکز بیضی

مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌گویند و آن را با **e** نشان می‌دهند. چون در بیضی $a > c$ ($a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$)، پس $۰ < e < ۱$. هر چه نسبت $\frac{c}{a}$ به ۱ نزدیک‌تر باشد، بیضی کشیده‌تر و هر چه مقدار $\frac{c}{a}$ به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی تپل‌تر و به دایره نزدیک‌تر می‌شود.

دایره

مجموعه‌ای از نقاط صفحه است که از یک نقطه ثابت (همون مرکز دایره) به یک فاصله ثابت (همون شعاع دایره) می‌باشد.

معادله استاندارد دایره

معادله استاندارد یک دایره به مرکز $O\Big|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}$ و شعاع **r** به صورت $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$ است.

نکته: حواستان باشد که مجموعه جواب نامعادله $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲<r^۲$

($(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲>r^۲$) نقاطی از صفحه را مشخص می‌کنند که درون (بیرون) دایره به مرکز $O\Big|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}$ و شعاع **r**

می‌باشند.

معادله گسترده دایره

اگر به کمک اتحاد اول، دستی به سر و گوش معادله استاندارد دایره بکشیم، با اندکی ساده‌سازی به معادله‌ای به فرم $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ می‌رسیم که به آن معادله گسترده دایره می‌گوییم. در این فرم، مختصات مرکز دایره $O(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ و شعاع آن برابر $r = \sqrt{\alpha^۲ + \beta^۲ - c}$ می‌شود.

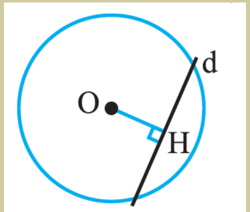
نکته: در فرم گسترده، ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ یک است. اگر مثلا **A** بود، اول بایدطرفین را بر **A** تقسیم کنید، بعد مختصات مرکز و شعاع را بیابید! در فرم استاندارد هم ضریب پشت **x** و **y** داخل پرانتز یک بود! تو رو خدا حواستان را جمع کنید! جانِ من!!

مثال (کار در کلاس با کمی شیطونی!) معادله گسترده دایره‌ای به شکل $-۲x^۲-۲y^۲+۴x+۱۲y=۱۲$ است. مختصات مرکز و شعاع آن را پیدا کنید و معادله دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

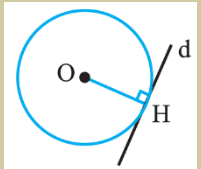
answer

اوضاع نسبی خط و دایره

دایره $C(o,r)$ را در نظر بگیرید. فاصله خط داده شده از مرکز آن را می‌یابیم ($(OH$ و اندازه آن را با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم. ۳ حالت ممکن است رخ دهد:

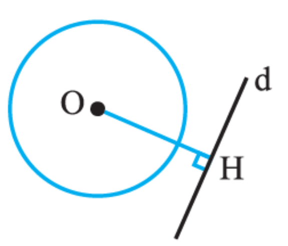


حالت ۱: اگر $OH < r$ ، خط d و دایره $C(o,r)$ در دو نقطه متقاطعند.



حالت ۲: اگر $OH = r$ ، خط d و دایره $C(o,r)$ بر هم مماسند.

توجه: خط مماس بر دایره در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود است.



حالت ۳: اگر $OH > r$ ، خط d و دایره $C(o,r)$ متقاطع نیستند.

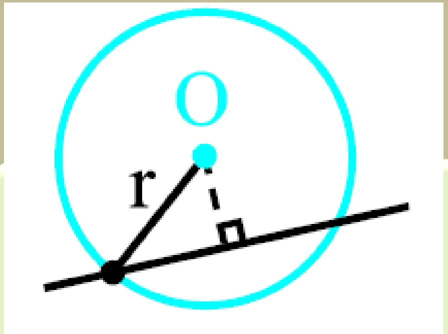
مثال: وضعیت دایره $(۲x-۴)^۲+(۲y+۶)^۲=۱۶$ و خط $۴x+۳y-۳=۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.

answer

مثال: (کار در کلاس) معادله دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x+4y-1=0$ مماس بوده و مرکز آن نقطه $C(1,2)$ باشد.

answer

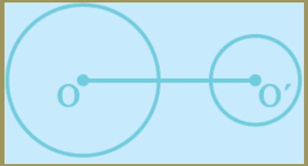
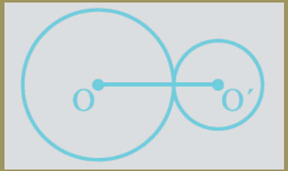
مثال: (کار در کلاس) مرکز دایره‌ای، نقطه $O(۲,-۳)$ است. مطابق شکل، این دایره روی خط $۳x-۴y+۲=۰$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله این دایره را بنویسید.

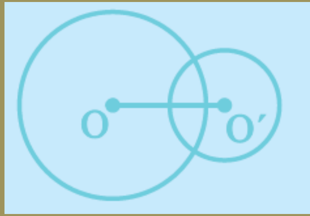


answer

اوضاع نسبی دو دایره

دو دایره $C(o,r)$ و $C'(o',r')$ را با فرض $r > r'$ در نظر بگیرید. خطی که مرکز دو دایره را به هم وصل می‌کند، خط المرکزین نامیده می‌شود که در این جا آن را با **d** نشان می‌دهیم. اوضاع نسبی دو دایره در جدول زیر نشان داده شده!

۱- دو دایره بیرون هم (متخارج)	$d > r + r'$	
۲- دو دایره مماس بیرون	$d = r + r'$	

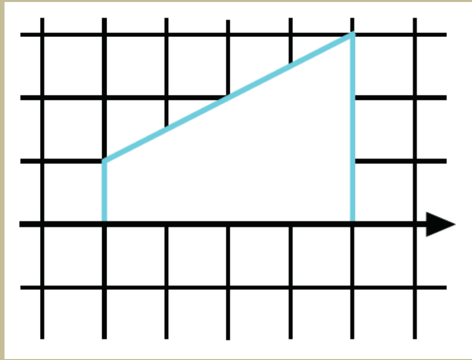
	$r - r' < d < r + r'$	۳- دو دایره متقاطع
	$d = r - r'$	۴- دو دایره مماس درون
	$d < r - r'$	۵- دو دایره متداخل
	$d = 0$	۶- دو دایره هم مرکز

مثال: (مثال کتاب) وضعیت دو دایره $x^۲+y^۲+۶x+۸y=۰$ و $x^۲+y^۲-۴x+۶y+۱۲=۰$ را نسبت به هم مشخص کنید و سپس نمودار دو دایره را رسم کنید.

answer

۱- (تمرین کتاب) در شکل زیر می‌خواهیم ذوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.

الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

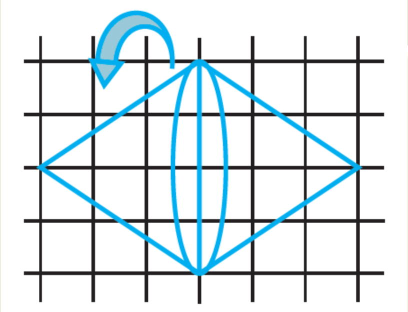


answer

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟

answer

۳- (تمرین کتاب) اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟



answer

۴- (تمرین کتاب) کانون‌های یک بیضی نقاط $(1,3)$ و $(1,-5)$ است.

الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a = 6$ باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

answer

۵- (تمرین کتاب) خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$ ، مرکز آن $(-۴,-۱)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

answer

۷- (تمرین کتاب) در حالت‌های زیر معادله دایره را بنویسید:

الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(۲,-۱)$ باشد.

answer

ب) دایره‌ای که مرکز آن $(۲,۳)$ و نقطه $(-۹,-۳)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

answer

پ) دایره‌ای که نقاط $(0,3)$ و $(-4,-1)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشند.

answer

فصل ۷ :

احتمال

یادآوری

حتما در سال‌های قبل، همکاران بزرگوار بنده، سینه احتمال را برایتان شکافته‌اند. در زیر خلاصه‌ای از مطالب سال‌های قبل احتمال آورده شده، ببینید ...

۱- پدیده تصادفی: پدیده یا آزمایشی که نتیجه آن را نتوان قبل از انجام، به طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲- فضای نمونه‌ای: مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه‌ای آن می‌گوییم و با S نشان می‌دهیم.

۳- پیشامد تصادفی: هر زیرمجموعه‌ای از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴- پیشامدها و اعمال روی آن‌ها: فرض کنید **A** و **B** دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند، داریم:

الف) اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای **A** یا **B** رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد **A** و **B** رخ دهند.

پ) تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد **A** رخ دهد، ولی پیشامد **B** رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد: پیشامد A' (یا A°) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد **A** رخ ندهد $\Leftarrow$ $\boxed{p(A') = ۱ - p(A)}$

۵- رابطه محاسبه احتمال وقوع یک پیشامد: $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

۶- رابطه محاسبه احتمال اجتماع دو پیشامد **A** و **B:** $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

۷- پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B نتوانند با هم رخ دهند، به بیان

دیگر $A \cap B = \varnothing$ ، در این صورت داریم: $\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$

۸- تعمیم پیشامدهای ناسازگار: پیشامدهای $A_۱, A_۲, ..., A_n$ را دو به دو ناسازگار می‌گوییم، هرگاه هیچ

دوتایی از آن‌ها نتوانند با هم رخ دهند. در این صورت داریم:

$$\boxed{p(A_۱ \cup A_۲ \cup ... \cup A_n) = p(A_۱) + p(A_۲) + ... + p(A_n)}$$

۹- احتمال شرطی: منظور از «احتمال A به شرط B» که آن را با $p(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است به شرط آن که برانیم B رخ داده و داریم:

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)};(p(B)\neq ۰)$$

۱۰- پیشامدهای مستقل: دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند، هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری بی‌تاثیر باشد. مستقل بودن دو پیشامد A و B، معادل است با این‌که:

$$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$$

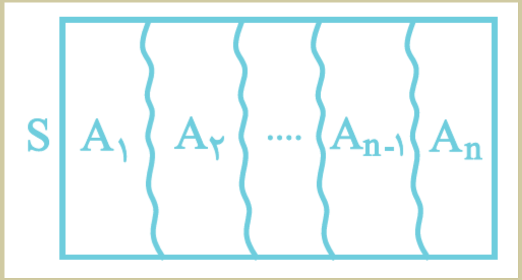
افراز

فرض کنیم $A_۱, A_۲, ..., A_n$ زیرمجموعه‌هایی ناتهی از مجموعه S باشند، به گونه‌ای که اجتماع همه آن‌ها برابر S، و اشتراک هر دوتای آن‌ها برابر $\varnothing$ باشد، در این صورت می‌گوییم این مجموعه‌ها، یک افراز روی S درست کرده‌اند. به عبارتی داریم:

$$۱)\quad A_۱ \cup A_۲ \cup .... \cup A_n = S \Rightarrow \bigcup_{i=۱}^{n} A_i = S$$

$$۲)\quad A_۱ \cap A_۲ = \varnothing \quad , \quad A_۲ \cap A_۳ = \varnothing \quad ,..., \quad A_{n-۱} \cap A_n = \varnothing \Rightarrow$$

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad , \quad \underset{i \neq j}{۱ \leq i, j \leq n}$$



مثال (مثال کتاب) کشور ایران به ۳۱ استان افراز شده است.

مثال (مثال کتاب) اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول و B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و $C=\{1\}$ باشند، در این صورت A و B و C یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی هستند.

مثال (مثال کتاب) مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد اصم، یک افراز روی مجموعه اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.

قانون کلی

حال اگر فرض کنیم در حالت کلی $A_1, A_2, \ldots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$\boxed{p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)\,p(B|A_i)}$$

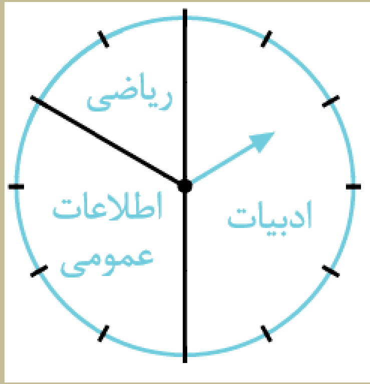
نکته: مسائل قانون احتمال کل را می‌توان با نمودار درختی نیز حل کرد! توضیح خواهم داد.

مثال: (مثال کتاب درسی) اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر $0/08$ و نوزاد دختر $0/03$ باشد و خانواده‌ای قصد بچه‌دار شدن داشته باشد، به چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟

مثال: (مثال کتاب) ۴ ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۴ مهره قرار دارد که ۴تای آن‌ها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند. در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶تای آن‌ها قرمزند و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد، چقدر است؟

answer

مثال: (مثال کتاب) سامان در یک مسابقه شرکت کرده است. سه بسته سوال، یکی شامل ریاضی، یکی اطلاعات عمومی و دیگری ادبیات ارائه شده است. اگر بسته سوال‌های ادبیات را به او برهند، به احتمال ۹۰ درصد، اگر بسته سوال‌های ریاضی را به او برهند، به احتمال ۶۰ درصد و اگر اطلاعات عمومی به او برهند، به احتمال ۸۵ درصد برنده خواهد شد. در صورتی که با چرخاندن عقربه چرخان در شکل مقابل نوع سوال‌هایی که به او داده می‌شود مشخص شود، تعیین کنید او با چه احتمالی برنده خواهد شد؟



مثال (مثال کتاب) دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟

answer

۱- (تمرین کتاب) دو جعبه داریم. درون یکی از آن‌ها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آن‌ها معیوب‌اند، درون جعبه دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آن‌ها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟

answer

۲- (تمرین کتاب) فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشد و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلاست؟

answer

۳- (تمرین کتاب) یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال این که دقیقا یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

answer