



ریاضی



فصل ١ :

مجموعه ، الگو، دنپاله

(٥ نمره)

مجموعه‌های اعداد

$\mathbb{N} \cup \{0\}$

\downarrow
۲: $\boxed{\mathbb{W}} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ مجموعه اعداد حسابی

۱: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ مجموعه اعداد طبیعی

۴: $\mathbb{Q} = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ مجموعه اعداد گویا

۳: $\mathbb{Z} = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ مجموعه اعداد صحیح

$$\begin{cases} \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' \\ \mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \end{cases}$$

\Leftarrow ۵: $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ مجموعه اعداد کنگ

بازه‌ها

به زیر مجموعه‌هایی از \mathbb{R} که قسمتی از محور اعداد حقیقی را نشان می‌دهند، بازه یا فاصله می‌گوییم. ۳ مدل بازه داریم:

۱ بازه بسته (شامل اعداد ابتدا و انتهای بازه می‌باشند مانند $(1, 2)$)

۲ بازه باز (شامل هیچ یک از اعداد ابتدا و انتهای بازه نیستند مانند $(1, 2)$ ، $(-3, +\infty)$ و ...)

۳ بازه نیم‌باز (شامل یکی از نقاط انتهایی خود می‌باشند مانند $[1, 2)$ ، $(1, 2]$ و ...)

جدول زیر را به عنوان یک مثال حل شده ببینید تا با انواع بازه آشنا شوید!!

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
بسته	$-۱, ۲$	$x \in \mathbb{R} \mid -۱ \leq x \leq ۲$	
باز	$(-۳, ۰)$	$x \in \mathbb{R} \mid -۳ < x < ۰$	
نیم باز	$(-۱, ۱]$	$x \in \mathbb{R} \mid -۱ < x \leq ۱$	
نیم باز	$(-\infty, ۲]$	$x \in \mathbb{R} \mid x \leq ۲$	
باز	$(۱, +\infty)$	$x \in \mathbb{R} \mid x > ۱$	
باز	$(-\infty, +\infty)$	\mathbb{R}	

مجموعه متناهی

مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی است. اعضای این نوع مجموعه‌ها قابل شمارش است. (متناهی یعنی ته داره)

مجموعه نامتناهی

مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها قابل شمارش نیست. به عبارت دیگر تعداد اعضای آن‌ها از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است.

مجموعه مرجع

مجموعه‌ای است که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن هستند و آن را با U ابتدا واژه **Universal** (به معنی جهانی) نشان می‌دهند. اگر در سوال یا بحثی، مجموعه مرجع مشخص نباشد، ما مجموعه اعداد حقیقی (بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که می‌شناسیم) را به عنوان مجموعه مرجع در نظر می‌گیریم.

متمم یک مجموعه

اگر U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آن‌گاه مجموعه $U - A$ ، را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. در واقع A' شامل همه عضوهای U است که در A نیست.

این‌ها را از الان بلد باشید سر امتحان پیوسته ببینید، و دل بفرمایید!

$$\emptyset' = U$$

$$U' = \emptyset$$

$$(A')' = A$$

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap U = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$U \cup \emptyset = U$$

$$U \cap \emptyset = \emptyset$$

نرخ بیکاری

برابر است با نسبت تعداد افراد بیکار در یک جامعه، به تعداد کل افراد آن جامعه. اگر مجموعه U اعضای جامعه، A

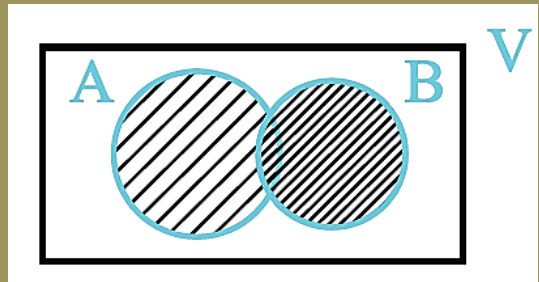
افراد شاغل و A' افراد بیکار جامعه باشند، داریم: $\frac{n(A')}{n(U)} \leq$

مثال: در یک جامعه آماری، مجموعه افراد شاغل ۶۴ عضو بیشتر از مجموعه افراد بیکار دارد. اگر این جامعه به طور کلی ۹۶ عضو تشکیل شده باشد، نرخ بیکاری این جامعه چند درصد است؟

answer

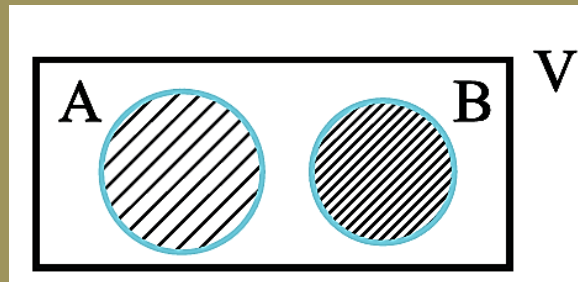
مجموعه‌های جدا از هم

دو مجموعه که فاقد عضو مشترک باشند را جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.



$$\Leftarrow \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

دقت کنید که فقط برای حالتی که **A** و **B** جدا از هم باشند (یعنی $n(A \cap B) = 0$) داریم:



$$\Leftarrow \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

مثال: (کار در کلاس کتاب) در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال، ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال می‌باشند و ۵ نفر عضو هیچکدام نیستند. چند نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم می‌باشند؟

answer

الگوی خطی

الگوهایی که جمله عمومی آن‌ها به فرم $t_n = an + b$ است که n شماره جمله و a و b اعدادی حقیقی می‌باشند.

مثال: در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید و به کمک آن جمله ۴۱۹ را بدست آورید.

answer

الگوی غیرخطی

الگوی است که درجه جمله عمومی آن نسبت به n ، یک نیست. مانند $a_n = an^2 - 1$ که جمله عمومی، مربوط به یک دنباله درجه ۲ است.

دنباله

زنجیره‌ای از اعداد، پشت سر هم را یک دنباله می‌گوییم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند

مثال: (کار در کلاس) الگوی مقابل را در نظر بگیرید. جمله ششم آن را بدست بیاورید. سپس جمله عمومی دنباله مربوط به این الگو را بیابید. آیا دنباله حاصل قطعی است؟



$$a_1 = 1$$



$$a_2 = 3$$



$$a_3 = 6$$

answer

دنباله حسابی

دنباله‌ای که هر جمله از آن (به جز جمله اول) با اضافه کردن عددی ثابت به جمله قبلی بدست می‌آید. به این عدد ثابت قدر نسبت می‌گوییم و با d نشانش می‌دهیم.

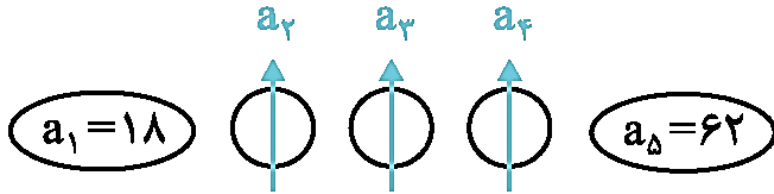
توجه: جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدر نسبت d می‌شود. $a_n = a_1 + (n - 1)d$

نکته: هواست باشه اون عددی که به عنوان ضریب میاد پشت d . مقدارش بیرونه از اندیس کمتره!

واسطه یا میانگین حسابی

اگر x و y و z ، ۳ جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، داریم $y = \frac{x+z}{2}$ و به y می‌گوییم واسطه حسابی x و z .

مثال: (کار در کلاس) بین اعداد ۱۸ و ۶۲ سه عدد چنان درج کنید که ۵ عدد حاصل تشکیل یک دنباله حسابی بدهند.



answer

دنباله هندسی

دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبلی‌اش در عددی ثابت و غیرصفر بدست می‌آید. این عدد را قدر نسبت می‌گوییم و آن را با q نشان می‌دهیم.

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

توجه: جمله عمومی یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q می‌شود:

نکته: هواسه باشد توان بالای q بدون کمتر از اندیشه

واسه یا میانگین هندسی

اگر x ، y و z ، جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، آنگاه رابطه $y^2 = xz$ بین آن‌ها برقرار است و y واسه هندسی x و z است.

نکته: فور y واسه هندسی است، نه y^2 !

مثال: اگر $2x$ ، $2x+1$ و $2x-1$ به ترتیب ۳ جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، قدر نسبت آن کدام است؟

answer

۱- (تمرین کتاب) متاهی یا ناممتاهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی

ب) مجموعه شماره‌های طبیعی عدد ۳۶

پ) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

ت) $A = \{x \in \mathbb{N}, 1 < x < 2\}$

ث) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰

۲- (تمرین کتاب) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی فواید بود یا نامتناهی؟

۳- (تمرین کتاب) در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر از آن‌ها در ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنها نیز اعلام کرده‌اند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

الف) دست‌کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟

ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند؟

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟

ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند؟

answer

۴- (تمرین کتاب) الگوی زیر را در نظر بگیرید.

الف) شکل بعدی را رسم کنید.

ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

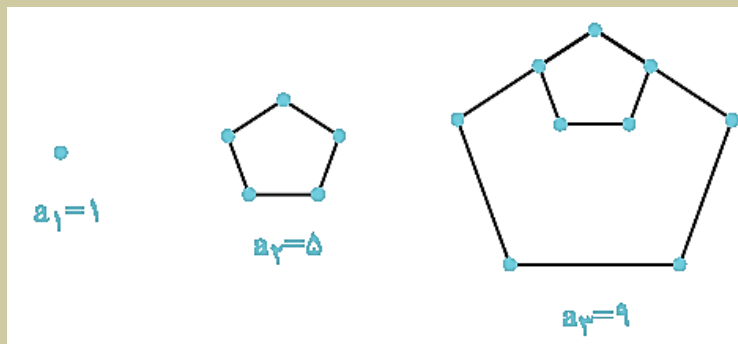
پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟



۵- (تمرین کتاب) در یک جمله دنباله حسابی مجموع ۳ جمله اول ۳ و مجموع ۳ جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

answer

۶- (تمرین کتاب الف) جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.



answer

ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.

پ) جمله پنجم آن دنباله ۳۹۷ است؟

۷- (تمرین کتاب) علی دوپرفه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت آن هر سال، ۲۰ درصد نسبت به سال قبل افت می‌کند.

الف) اگر پس از ۳ سال قصد فروش دوپرفه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دوپرفه پس از گذشت n سال از چه رابطه‌ای بدست می‌آید؟

answer

۱- (تمرین کتاب) جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

answer

۹- (امتحانات سال گذشته) فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند که

$$n(A \cap B) = 25, \quad n(B) = 50, \quad n(A) = 70, \quad n(U) = 120.$$

ج) $n(A \cap B')$

ب) $n(A' \cap B')$

الف) $n(A \cup B)$ (مطلوب است)

answer

۱۰- (امتحانات سال گذشته) بین دو عدد ۳ و ۱۶۳ چهار عدد طوری قرار دهید که دنباله حسابی تشکیل شود.

answer

۱۱- (امتحانات سال گذشته) b_n و a_n دنباله‌های مقابل هستند. بیست و هفتمین جمله دنباله a_n

برابر k است. k و b_k را بدست آورید.

$$\begin{cases} a_n = -5, -1, 3, \dots \\ b_n = 2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots \end{cases}$$

answer



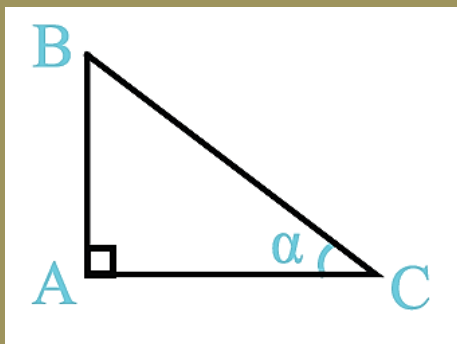
فصل ٢ :

مشقات

(٥ نمره)

نسبت‌های مثلثاتی

در مثلث هر قائم‌الزاویه داریم:



$$\cos \alpha = \frac{AC}{BC}$$

$$\sin \alpha = \frac{AB}{BC}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{AB}{AC}$$

مثال: (کتاب درسی) نسبت‌های مثلثاتی زاویه 45° را حساب کنید.

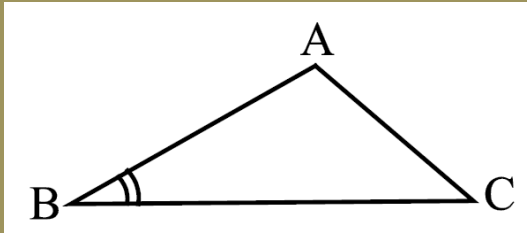
answer

مقادیر مثلثاتی زوایای مهم

جدول زیر را باید حفظ کنید! همین قدر خشک و گوشت تلخ!

مقدار	30°	45°	60°
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

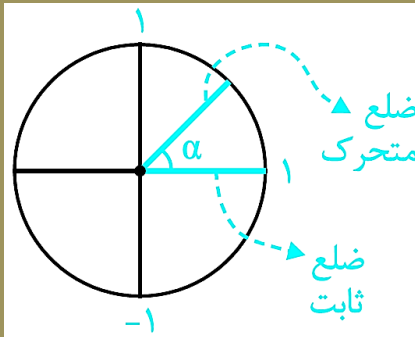
مساحت مثلث



در هر مثلث با معلوم بودن دو ضلع و زاویه بین، مساحت قابل محاسبه است:

$$S = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin B$$

دایره مثلثاتی



دایره‌ای است به شعاع واحد، کار آن تولید زاویه است. یک ضلع ثابت دارد، یک ضلع متحرک. ضلع متحرک با حرکت خود و انحرافی که ایجاد می‌کند، زاویه تولید می‌کند.

توجه: حرکت ضلع متحرک در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، حرکتی مثبت است و زوایای مثبت تولید می‌کند، اما حرکت آن در جهت عقربه‌های ساعت، حرکتی منفی است و زوایای منفی تولید می‌کند.

مثال: (فعالیت کتاب) هر یک از زوایای ۱۳۵° ، -۳۰° و -۲۷۰° را روی یک دایره نشان دهید.

answer

نتیجه ۱

معمولاً، محور x ها، محور \cos ها و محور y ها، محور \sin ها است. از آنجایی که این محورها در دایره بین 1 و -1 بلوکه

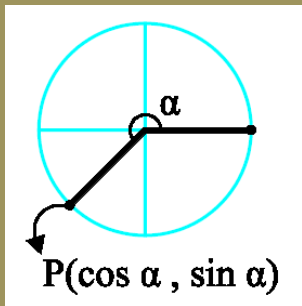
$$-1 \leq \sin \Delta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \Delta \leq 1$$

شده‌اند، پس برای هر زاویه دلفواه Δ داریم:

نتیجه ۲

نقطه انتهایی ضلع متحرک (یعنی p) دارای یک مولفه طولی (که می‌شود \cos زاویه مرکزی) و یک مولفه عرضی (که می‌شود \sin زاویه مرکزی) است، ببینید:

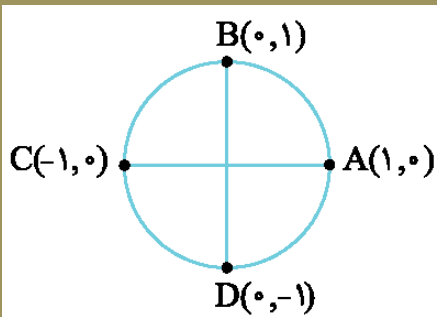


$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

نتیجه ۳

نسبت‌های مثلثاتی زوایای ابتدای ربع‌ها

زوایای ابتدای ربع‌ها مثلا 0° و 90° و 180° و 270° و 360° و ... که در دایره مقابل روی نقاط A و B و C و D قرار می‌گیریم. می‌دانیم طول این نقاط، برابر \cos و عرض این نقاط برابر \sin این زوایا است.



علامت نسبت‌ها در ربع‌های دایره



هستک

همه سینوس تانژانت کوسینوس

رمز: بار هسته اتم مثبت!

مثال: اگر $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ و $\tan^2 \alpha \times \sin \alpha > 0$ ، انتهای α در کدام ربع دایره مثلثاتی می باشد؟

answer

فرمولای مقدماتی مثلثات

۱ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

۲ $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

۴ $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

→ در نواحی ۱ و ۴
→ در نواحی ۲ و ۳

۳ $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

۵ $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

→ در نواحی ۱ و ۲
→ در نواحی ۳ و ۴

۶ $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$

۷ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

فرمولای
نقره‌ای

۱ ÷ $\sin^2 \alpha$ → $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

۱ ÷ $\cos^2 \alpha$ → $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

۸ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

۹ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

مثال: (مثال کتاب درسی) درستی اتحاد مثلثاتی $(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta)(1 - \sin \theta) = \cos \theta$ را بررسی کنید.

answer

مثال: (کار در کلاس) درستی هر یک از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$$\frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\text{ب})$$

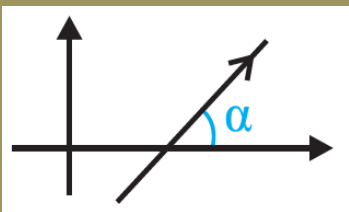
$$\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \quad (\text{الف})$$

answer

answer

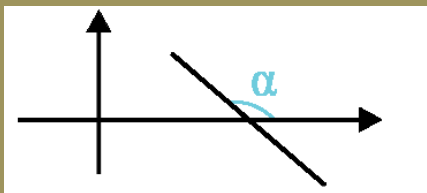
رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور x ها.



$$\Rightarrow \text{شیب خط} = \tan \alpha$$

نکته: گوش و پشمتو تیز کن! گفتم زاویه بین خط و جهت مثبت محور x ها! مثلاً برای این خط که نزولیه، رو



مشخص می‌کنم، ببین



یادآوری ۱

معادله فخطی با شیب m که از نقطه $A \left(\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right)$ می‌گذرد \Leftrightarrow $y - y_0 = m(x - x_0)$

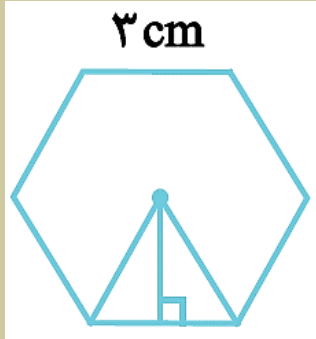
یادآوری ۲

معادله فخطی که از نقطه $A \left(\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right)$ و $B \left(\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \right)$ می‌گذرد \Rightarrow $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$

مثال: (کار در کلاس کتاب با تغییر) معادله فطی را بنویسید که زاویه آن با جهت منفی محور x ها 150° است و از نقطه $(1, 0)$ می‌گذرد.

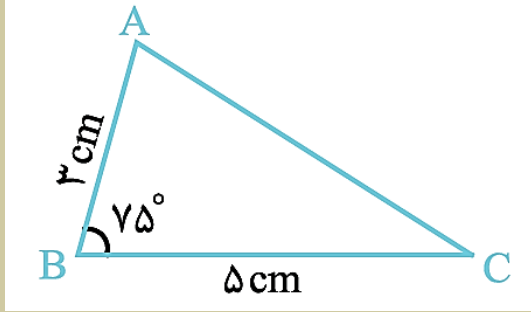
answer

۱- (تمرین کتاب) مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.



answer

۲- (تمرین کتاب) فرض کنید $\sin 75^\circ = 0.96$ ، مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.



answer

۳- (تمرین کتاب) سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید اگر $\cos \alpha = \frac{3}{7}$ (α در ربع چهارم)

answer

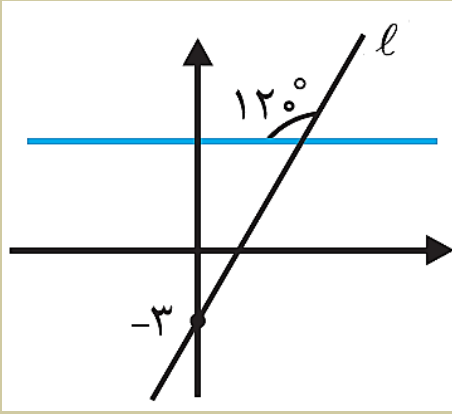
۴- (تمرین کتاب) اگر $\sin \alpha \times \cos \alpha < 0$ ، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می تواند قرار بگیرد؟

answer

۵- (تمرین کتاب) معادله فطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور X ها 45° است و نقطه $(0, 2)$ روی آن قرار دارد.

answer

۶- (تمرین کتاب) با توجه به شکل زیر، معادله خط l را به دست آورید.



answer

۷- (تمرین کتاب) اگر $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه 24° ، را به دست آورید.

answer

۸- (امتحانات سال گذشته) درستی رابطه زیر را بررسی کنید.

$$\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \sin 30^\circ$$

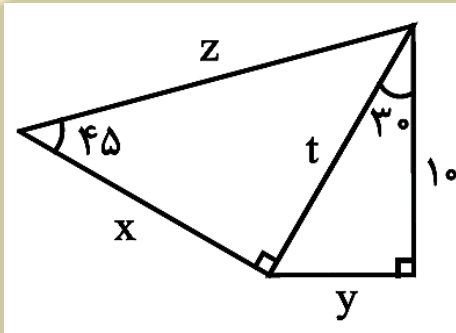
answer

$$\frac{\cot 60 - \tan 30 + 5 \cot 45}{8 \cot 45 - \sin 90 + 5 \tan 45}$$

۹- (امتحانات سال گذشته) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

answer

۱۰- (امتحانات سال گذشته) با توجه به شکل، اندازه اضلاع x ، y ، z ، t را به دست آورید.



answer

۱۱- (امتحانات سال گذشته) با فرض با معنی بودن هر کسر، درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$

answer

$$ب) \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

answer



فصل ۳ :

توان‌های گویا و
عبارت‌های چپ‌پری

(۵ نمره)

محاسبه مقدار تقریبی ریشه‌ها

بعضی از ریشه‌ها مقدارشان دقیق است، مانند $\sqrt[3]{27}$ اما گاهی از ما می‌فروشند مقدار تقریبی حساب کنیم مانند $\sqrt[3]{20}$

در این حالت $\sqrt[3]{20}$ را بین دو ریشه سوم دقیق قرار می‌دهیم: $\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{20} < \sqrt[3]{27}$

از آنجایی که ۲۰ به ۲۷ نزدیک‌تر است، پس $\sqrt[3]{20}$ از $\frac{2}{5}$ بیشتر است. مثلاً عدد $\frac{2}{7}$ را عدد زده و به

عنوان جواب ارائه می‌دهیم.

مثال: (کار در کلاس) مقدار تقریبی ریشه‌ها را برای هر قسمت مناسبه کنید.

ب) $\sqrt{۸۹}$

answer

الف) $\sqrt[۳]{-۱۶}$

answer

هر عدد مثبت دارای ۲ ریشه زوج است که مقادیر آن‌ها قرینه یکدیگرند. اعداد منفی ریشه زوج ندارند. (مثلا،

نتیجه می‌شود $x^4 = 16 \iff x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$. اعداد ۲ و -۲ ، ریشه‌های چهارم ۱۶ می‌باشند! عدد -۱۶

ریشه ۴ام ندارد.)

هر عدد مثبت یا منفی دارای ۱ ریشه فرد است. اگر مثبت باشد، ریشه فرد آن نیز مثبت و اگر منفی باشد، ریشه

فرد آن نیز منفی خواهد بود.

مثال: ریشه پنجم اعداد $-۰/۰۰۰۰۳۲$ و $\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰}$ را حساب کنید.

answer

اعداد بین صفر و یک هر چه توانشان بیشتر باشد، مقدارشان کمتر و اعداد بزرگ تر از یک هر چه توانشان بیشتر

باشد، مقدارشان بیشتر می شود. (مثلا $(0.1)^3 > (0.1)^5$ اما $10^5 > 10^3$. برای مقایسه دو عدد منفی، اول

بدون منفی آن ها را حساب کن، مثلا بین $(0.2)^5$ و $(0.2)^7$ می دانیم $(0.2)^5 > (0.2)^7$. اما

$$(-0.2)^5 < (-0.2)^7$$

ریشه n ام : اگر $n \geq 2$ و یک عدد طبیعی باشد، b ، a ریشه n ام a می نامیم هرگاه : $b^n = a$

نکاتی باحال از بحث فوق

$$① \quad \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{ab} & n=2k \quad a, b > 0 \\ \sqrt[n]{ab} & n = 2k + 1 \end{cases}$$

$$② \quad \begin{cases} \rightarrow \sqrt[n]{a^n} = |a| \longrightarrow \sqrt[4]{2^4} = |2| = 2, \sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2 \\ \rightarrow (\sqrt[n]{a})^n \begin{cases} a < 0 \rightarrow \\ a \geq 0 \Rightarrow \end{cases} \end{cases}$$

$$③ \quad n = 2k - 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a \longrightarrow \sqrt[3]{(-2)^3} = (\sqrt[3]{-2})^3 = -2$$

نکاتی از توان‌های گویا

① $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \rightarrow (-2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-2)^2} = \sqrt[3]{4}$

② $a^{-\Delta} = \left(\frac{1}{a}\right)^\Delta \rightarrow 2^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

③ $a^r \times a^s = a^{(r+s)}$

④ $\frac{a^r}{a^s} = a^{(r-s)}$ ⑤

$(a^r)^s = a^{rs}$

⑥ $(ab)^r = a^r \times b^r$

⑦ $a^{b^c} = (a)^{(b^c)} \neq (a^b)^c \rightarrow 2^{3^2} = 2^{(3^2)} = 2^9 \neq (2^3)^2$

⑧ $(a^b)^c = a^{(b \times c)} \rightarrow (2^3)^2 = 2^6 = 64$

⑨ $a > 0 \Rightarrow \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a} \rightarrow \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

اتجاهای جدیدی

$$① \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$② \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \longrightarrow a^{2\Delta} - b^{2\circ} = (a^{\Delta} - b^{\circ})(a^{\Delta} + b^{\circ})$$

$$③ \quad x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

نکته: توجه کنید که ضریب جمله توان ۲ (یعنی ۱)، یک است. اگر ضریب داشت، عبارت را با روش A می‌توانیم تجزیه کنیم. مثلاً فرض کنید می‌فواهیم، را تجزیه کنیم:

$$A = 2x^2 + 3x + 1 \longrightarrow 2A = (2x)^2 + 3(2x) + 2 = (2x + 1)(2x + 2) \xrightarrow{\div 2} A = (2x + 1)(x + 1)$$

$$④ \quad \text{اتحاد مکعب مجموع دو جمله} \Rightarrow (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$⑤ \quad \text{اتحاد پاق و لاغر} \Rightarrow a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

مثال: (کار در کلاس) عبارت $x^6 - 1$ را تا جایی که ممکن است تجزیه کنید.

answer

عبارت گویا

به عبارت‌های کسری‌ای می‌گویند که صورت و مخرج آن یک چند جمله‌ای است. مثلاً $\frac{x^2-1}{x}$ و $2x$

و 4 و ... اما $\frac{\sqrt{x}-1}{2x}$ فی‌ال‌واقع چون صورتش چند جمله‌ای نیست.

توجه: یک عبارت گویا به ازای مقادیری از متغیر که مخرج را صفر می‌کنند (ریشه‌های مخرج) تعریف نمی‌شود.

مثال: (فعالیت کتاب) عبارت گویای زیر به ازای چه مقادیری از x تعریف نمی‌شود؟

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4}$$

مثال: (فعالیت کتاب) حاصل کسرهای زیر را بدست آورید و ساده کنید.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1}$$

answer

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{x-1}$$

answer

$$\frac{x^3 - 1}{(x - 1)^3}$$

answer

$$\frac{x^6 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

answer

گویا کردن مخرج کسرها

از سال گذشته به یاد دارید که برای گویا کردن مخرج کسرهایی که شامل یک رادیکال است، صورت و مخرج را در

عبارت رادیکالی مناسب ضرب می‌کردیم تا مخرج گویا شود. ببینید:

$$\frac{5}{2 \times \sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}} = \frac{2\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{2\sqrt[3]{2^4}}{4} = \frac{2 \times 2\sqrt[3]{2}}{4} = \sqrt[3]{2}$$

۲ عبارت $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ و $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ مزدوج یکدیگرند. اگر مفرقی فقط یکی از آن‌ها را داشت، برای گویا کردن

مخرج، صورت و مخرج را در مزدوج ضرب کرده و اتحاد مزدوج می‌سازیم و کامروا می‌شویم!

مثال: (فعالیت کتاب) مفرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

$$\frac{h}{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}$$

answer

$$\frac{8}{3\sqrt{2} + 4}$$

answer

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{x^2} + 1)}$$

answer

$$\frac{x + \lambda}{\sqrt[3]{x} + 2}$$

answer

۱- (تمرین کتاب) مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید.

الف) $\sqrt{۱۰}$

ب) $\sqrt[۳]{۷/۲۵}$

answer

پ) $\sqrt[۵]{۱۶}$

ت) $\sqrt[۵]{۶۴}$

answer

۲- (تمرین کتاب) جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد 3^3 و ریشه‌های چهارم عدد می‌باشند.

ب) اگر $\sqrt[4]{16} = a$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $a^3 + 5$ برابر است با

answer

۳- (تمرین کتاب) در جاهای خالی یکی از علامت‌های « < » ، « > » یا « = » را قرار دهید.

$$\sqrt[5]{0/00001} \bigcirc 0/1$$


$$(-2)^5 \bigcirc (-2)^4$$

$$(-0/1)^5 \bigcirc (-0/1)^3$$

$$(0/5)^2 \square (0/5)^3$$


$$\sqrt{0/5} \square \sqrt[3]{0/5}$$

$$\sqrt{4} \square \sqrt[3]{4}$$

• $\underline{\underline{a < 1}}$ 

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

$$a^2 \square a^3$$

$\underline{\underline{a > 1}}$ 

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

$$a^2 \square a^3$$

۱- (تمرین کتاب) حساب کنید.

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{64}}$$

$$\sqrt{\sqrt{81}}$$

۹- (تمرین کتاب) هر یک از عبارتهای زیر را تا حد ممکن تجزیه کنید.

$$x^4 - y^4$$

$$x^6 - y^6$$

$$8a^3 + 27$$

$$a^3 b^6 - 8$$

۱۰- (تمرین کتاب) مفرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

$$\frac{۳}{۳ + \sqrt{۷}}$$

$$\frac{۸}{\sqrt{۵} + \sqrt{۳}}$$

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{x} - ۲}$$

$$\frac{۶}{۲\sqrt[۳]{۲} - ۱}$$

۱۱- (تمرین کتاب) حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1}$$

answer

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} - \frac{1}{x-1}$$

answer

۱۲- (تمرین کتاب) اگر $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4} = 3$ ، حاصل عبارت $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}$ را به دست آورید.

answer

۱۳- (امتحانات سال گذشته) حاصل عبارات زیر را به صورت توان گویا بنویسید.

$$\sqrt[5]{\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}}}$$

answer

$$\left(\sqrt[4]{\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}}\right)^{48}$$

answer

۱۴- (امتحانات سال گذشته) اگر $2^{x+2y} = \frac{1}{32}$ و $2^{2x-y} = 8$ باشد، حاصل $x+y$ را به دست آورید.

answer

۱۵- (امتحانات سال گذشته) اگر $a+b=1$ و $a^2+b^2=5$ و a^3+b^3 را مناسبه کنید.

answer



فصل ٤ :

معادله و نامعادله (٥ نمره)

معادله درجه ۲

هر معادله به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ که $a \neq 0$ یک معادله درجه دوم است. بیا یاد روش‌های حل آن را سریع مرور کنیم.

با کمک اتحادها یا فاکتورگیری...

۱- حل درجه ۲ به کمک تجزیه

$$x^2 - 3x = 10$$

$$3t^2 = t$$

۲- حل معادله درجه ۲ به کمک ریشه گیری

می‌دانیم اگر $x^2 = a$ ($a > 0$) آنگاه $x = \sqrt{a}$ یا $x = -\sqrt{a}$ از این خاصیت برای حل این معادلات بهره می‌بریم. ببینید:

$$\Rightarrow (r - 2)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} r - 2 = 4 \Rightarrow \boxed{r = 6} \\ r - 2 = -4 \Rightarrow \boxed{r = -2} \end{cases}$$

(مثال) (کار در کلاس)

۳- حل معادله درجه ۲ به کمک مربع کامل کردن

برای مربع کامل کردن معادله درجه دو $ax^2 + bx + c = 0$ ابتدا طرفین را بر a تقسیم کن. بعد ضریب x را نصف کنی، به توان ۲ برسانی، یکبار جمع و یکبار کم کنی تا اتحاد اول ساخته شود. مثال زیر را ببینید.

(کار در کلاس) (مثال)

$$2x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x^2 + \frac{x}{2} - 1 = 0 \rightarrow$$
$$x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} - 1 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{17}{16} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{17}}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{17} - 1}{4} \\ x + \frac{1}{4} = \frac{-\sqrt{17}}{4} \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{17} - 1}{4} \end{cases}$$

۴- حل معادله درجه دوم با روش فرمول کلی

در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ داریم: $\Delta = b^2 - 4ac$ ، جواب‌ها از طریق فرمول $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ بدست می‌آیند.

اگر $\Delta > 0$ معادله دارای دو ریشه $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ است.

اگر $\Delta = 0$ معادله دارای یک ریشه مضاعف $x = -\frac{b}{2a}$ است که به آن ریشه مکرر مرتبه دوم هم می‌گویند.

اگر $\Delta < 0$ معادله فاقد ریشه است.

مثال: (مثال کتاب) از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می‌فواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم.
طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

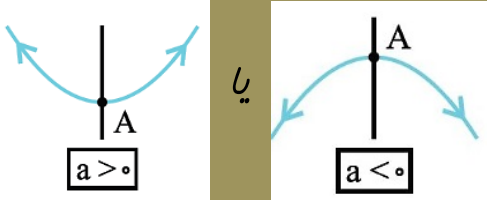
answer

سهمی

نمودار هر معادله به صورت $y = ax^2 + bx + c$ که $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ هستند را یک سهمی

می‌گوییم که به یکی از ۲ صورت

یا



است.

راس سهمی

نقطه **A** در دو شکل بالا (در قله و قعر نمودار) را راس سهمی می‌گوییم. طول این نقطه $x_A = -\frac{b}{2a}$ است. این طول را اگر در معادله سهمی قرار دهید، عرض راس را می‌گیرید.

خط تقارن سهمی

خط چین قائم در دو شکل بالا را خط تقارن سهمی می‌گوییم. این خط، خط قائمی است که از رأس سهمی

می‌گذرد و معادله آن $x = -\frac{b}{2a}$ می‌باشد.

مثال: (کار در کلاس) در هر یک از سهمی‌های زیر، رأس، رأس، رأس و سپس آن را رسم کنید.

الف) $y = (x + 1)^2 - 2$

answer

ب) $y = -2x^2 + 1$

answer

تعیین علامت

PART 1: تعیین علامت عبارات فخطی به فرم $y = ax + b$

ابتدا ریشه آن‌ها را بدست بیاوریم $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$. سپس در یک جدول آن را به صورت روبرو

حدود x	$-\frac{b}{a}$	
y	مخالف علامت a	موافق علامت a

تعیین علامت کنید.

نکته: هواست باشد، تعیین علامت $(ax + b)^{2n+1}$ دقیقاً شبیه $(ax + b)$ است. اما $(ax + b)^{2n}$ همواره

بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.

مثال: (کار در کلاس) هر یک از عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

$$\mathbf{A} = (2\mathbf{x} - 3)^2 \times (\mathbf{x}^3)$$

$$\mathbf{B} = \frac{(\mathbf{x} - 1)}{(5 - 2\mathbf{x})}$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

PART 2: تعیین علامت عبارات درجه دوم به فرم

ابتدا ریشه(های) آن را بدست می‌آوریم. بسته به تعداد ریشه‌ها (علامت Δ) ۳ حالت برای تعیین علامت آن ایجاد می‌شود:

حدود x	x_1	x_2	
y	موافق علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a

الف) $\Delta > 0$ ← ۲ ریشه دارد و به صورت زیر تعیین علامت می‌شود:

حدود x	$x_1 = x_2$	
y	موافق علامت a	موافق علامت a

ب) $\Delta = 0$ ← یک ریشه مفراعف دارد و به صورت زیر تعیین علامت می‌شود:

حدود x	
y	همواره موافق علامت a

ج) $\Delta < 0$ ← معادله فاقد ریشه است و به صورت زیر تعیین علامت می‌شود:

مثال: (مثال کتاب با تغییر) عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$p(x) = \frac{(-2x + 1) \overbrace{(-x^2 + x - 2)}}{\underbrace{(x^2 + x - 2)}}$$

answer

نامعادله

اگر A و B دو عبارت جبری باشند، فرم‌های $A > B$ ، $A \geq B$ ، $A \leq B$ و $A < B$

را می‌گویند نامعادله! با حل مثال شروع می‌کنم! چون اینجا سوسول بازی نداریم!!

مثال: (کار در کلاس) حداقل و حداکثر دمای یک شهر در یک روز، ۱۵ و ۲۵ درجه سانتی‌گراد است و رابطه بین درجه فارنهایت F و سانتی‌گراد C به صورت است. حداقل و حداکثر دما را بر حسب فارنهایت بیابید.

answer

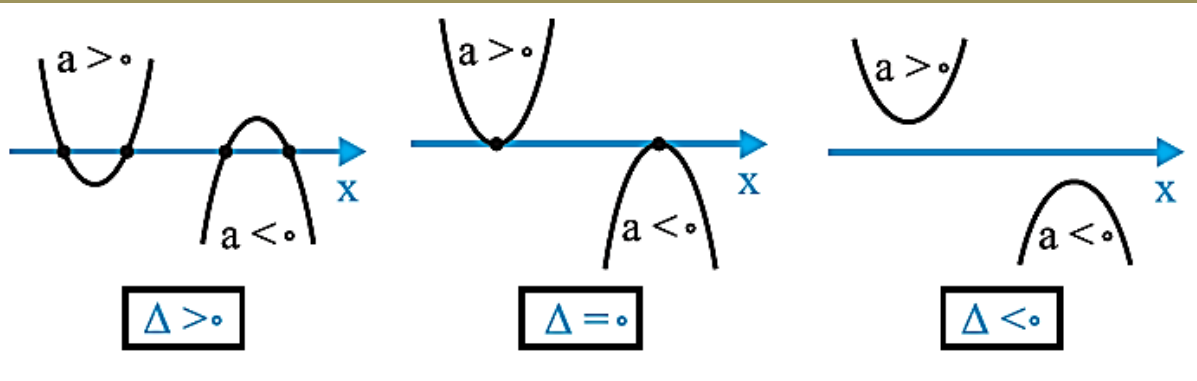
حل نامعادلات پیچیده‌تر (درجه ۲ و کسری و ...)

عبارت داده شده را در جدول تعیین علامت کنید. بازه‌ای که در نامعادله صدق می‌کند را به عنوان جواب ارائه دهید. مثال‌های زیر را ببینید.

$$\boxed{3x^2 - x - 2 \geq 0}$$

$$\frac{x^2 - 9}{2x + 1} \geq 0$$

answer



به وضعیت یک سهمی نگاه کن:

با توجه به آن نتیجه می شود که:

الف) شرط آنکه سهمی همواره مثبت باشد (بالای محور x باشد همیشه!) آن است که اولاً $\Delta < 0$ ثانیاً $a > 0$.

ب) شرط آنکه سهمی همواره منفی باشد آن است که اولاً $\Delta < 0$ ثانیاً $a < 0$.

۴ نکته طلایی : اگر $a > 0$ باشد داریم:

۱ $\square^2 \geq a^2 \Leftrightarrow \square \geq a \text{ or } \square \leq -a$

۲ $\square^2 \leq a^2 \Leftrightarrow -a \leq \square \leq a$

۳ $|\square| \geq a \Leftrightarrow \square \geq a \text{ or } \square \leq -a$

۴ $|\square| \leq a \Leftrightarrow -a \leq \square \leq a$

مثال: برای چه مقادیری از m عبارت $y = -2mx^2 + mx - \frac{1}{2m}$ همواره مثبت است؟ (مثال کتاب با تغییر)

answer

مثال: (کار، در کلاس) در نامعادله زیر، مجموعه جواب را به صورت بازه بردست آورده و سپس روی محور نشان دهید.

$$|5 - 2x| \geq 1$$

answer

نکته: هواست باشه! یا به معنی اجتماع و و به معنای اشتراک است.

۱- (تمرین کتاب) هر یک از معادله‌های زیر را به روش دلفواه حل کنید.

$$2x^2 = 250$$

$$9 - 6z + z^2 = 0$$

$$4a^2 + 3a = 1$$

$$b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$$

۲- (تمرین کتاب) مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

answer

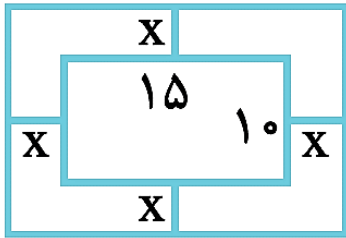
۳- (تمرین کتاب) طول یک مستطیل 3cm بیشتر از 4 برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل 45cm^2 باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

answer

۴- (تمرین کتاب) اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر چهار سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

answer

۵- (تمرین کتاب) یک عکس به اندازه ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت 300cm^2 قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.



answer

۶- (تمرین کتاب) نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

$$y = -(x+1)^2 - 3$$

$$y = 3x^2 - 2$$

$$y = \frac{x^2}{2} + x - 4$$

$$y = x - x^2$$

۷- (تمرین کتاب) اگر $(-۲, ۵)$ و $(۰, ۵)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید.

answer

۱- (تمرین کتاب) در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

$$1 < 2x - 3 \leq 3$$

$$x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$$

$$-2 < \frac{5 - x}{2} < 0$$

$$\frac{4 - 2x}{3x + 1} \geq 0$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}^2 + 4) < 0.$$

$$\frac{\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}}{\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} + 2} \leq 0.$$

$$|\mathbf{y} - 2\mathbf{x}| < 1$$

$$\left| \frac{\mathbf{x}-1}{2} - 1 \right| \geq 2$$

۹- (تمرین کتاب) به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟

answer

۱۰- (امتحانات سال گذشته) به ازای چه مقادیری از \mathbf{a} ، $(\mathbf{a}-۱)\mathbf{x}^۲ + (\mathbf{a}-۸)\mathbf{x} + \mathbf{a} + ۷ = ۰$ دارای ریشه مضاعف است؟

answer

۱۱- (امتحانات سال گذشته) نمودار سهمی محور y ها، a به عرض 2 و محور x ها، a در نقاط به طول 1 و 2 قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

answer

۱۲- (امتحانات سال گذشته) مجموعه جواب نامعادله زیر را به وسیله بازه‌ها نمایش دهید.

$$\frac{x^2 - 25}{x(x - 3)^3} \geq 0$$

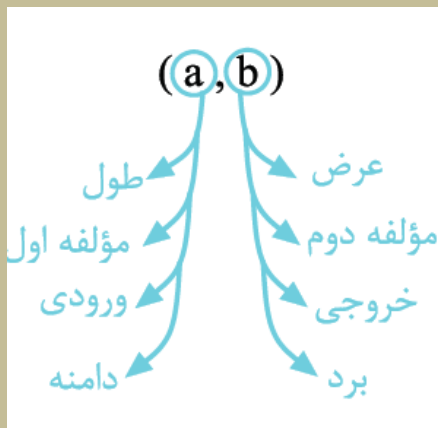
answer



فصل ۵ :

تابع

مفهوم زوج مرتب



هر دو تایی‌ای که فاقد فاصیبت جابجایی است را زوج مرتب می‌گویند.

تعریف زوج مرتبی تابع

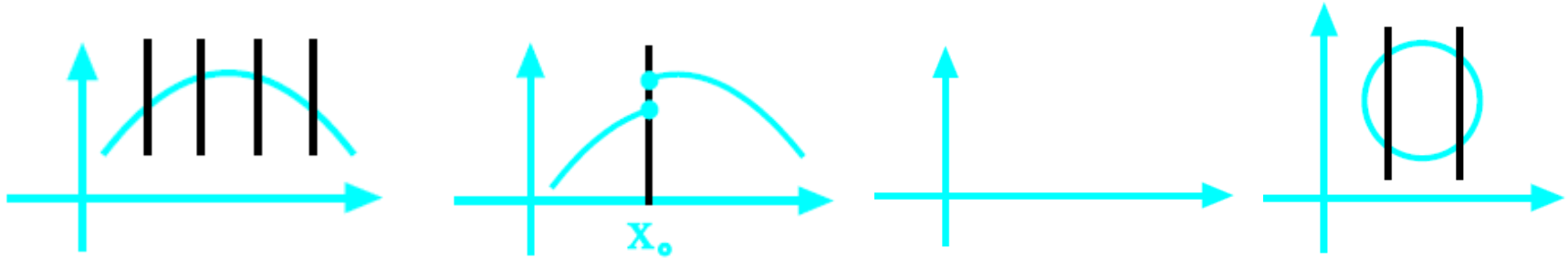
مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب را یک تابع می‌گوییم، هرگاه هیچ دو زوج مرتب متمایز آن دارای مفتض‌های اول برابر نباشند. اگر مفتض‌های اول آن‌ها با هم برابر باشد، باید مفتض‌های دوم آن‌ها نیز برابر باشد.

مثال: به ازای کدام مقدار a و b ، رابطه $R = \{(1, 2)(3, -b)(1, 2a - 1)(3, 2)\}$ یک تابع است؟

answer

تعریف نموداری تابع

یک نمودار زمانی مربوط به یک تابع است که هر خط موازی محور y ها، آن نمودار را در حداکثر یک نقطه قطع کند.



تعریف تابع از روی نمودار و ن (نمودار پیکانی)

زمانی یک تابع را مشفص می‌کنند که از هر عضو بیضی سمت چپ دقیقا یک فلش خارج شود. مهم نیست که به اعضای بیضی سمت راست، فلش وارد شود، نشود یا چند فلش وارد شود.

ضابطه تابع

ارتباط ریاضی بین ورودی (x) و خروجی $(y = f(x))$ است. مثلا $f(x) = \sqrt{x}$ ضابطه یک تابع
رادیکالی است. $f(1) = \sqrt{1} = 1$ و $f(4) = \sqrt{4} = 2$

اما این تابع در نقاط به طول منفی تعریف نشده، مثلا $y = f(-4)$ تعریف نشده!

دامنه و برد توابع

مردود ورودی (X) که تابع می تواند در آن بازه تعریف شود را دامنه تابع می گوییم. به مقدار فروبی هایی که به ازای مقادیر دامنه تولید می شود، برد تابع می گوییم.

در نمایش زوج مرتبی تابع، مؤلفه های اول، دامنه تابع و مؤلفه های دوم برد آن می باشند.

در نمایش پیکانی تابع، افضایی که پیکان از آن ها خارج می شود دامنه و افضایی که پیکان به آن ها وارد می شود برد است.

مثال: در تابع $f = \left\{ (1, 2a)(1, 4)(5, -\frac{b}{2}) \right\}$ ، اگر مجموعه برد فقط یک عضو داشته باشد، حاصل $a + b$ را بیابید.

answer

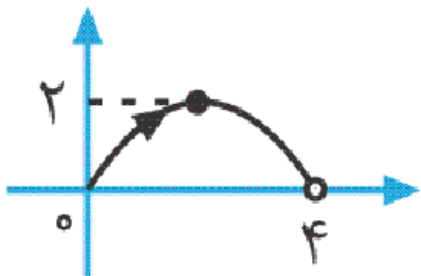
مثال: (کار در کلاس) اگر تابعی با نمایش پیری $f(n) = n^2 + 1$ داده شده باشد و دامنه آن

باشد، برد تابع f را بدست آورید و f را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید. $A = \{1, 2, 3, 4\}$

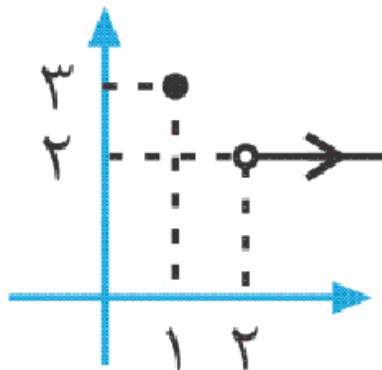
answer

مثال: در هر قسمت نمودار یک تابع داده شده. دامنه و برد آن را مشخص کنید.

الف)



ب)



انواع تابع

۱ توابع چند جمله‌ای: توابعی که ضابطه آن‌ها به فرم $y = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$ باشد. دامنه این

توابع \mathbb{R} است. یعنی هر مقدار ورودی‌ای که عشقمان بکشد می‌توانیم در ضابطه جایگذاری کنیم. بزرگ‌ترین

توان می‌شود درجه چند جمله‌ای. مثلا $y = 3x^4 - 2x$ یک چند جمله‌ای درجه ۴ است.

مثلا $y = 3x^3 - 2x\sqrt{x}$ چند جمله‌ای نیست. چون توان جمله $-2x\sqrt{x}$ ، عدد حسابی نیست.

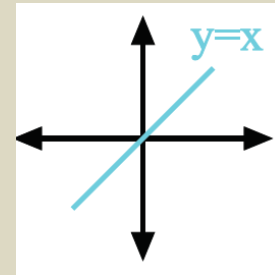
مثلا $y = 1$ یک چند جمله‌ای درجه صفر است. (در واقع اینجوری بوده: $y = 1(x^0) = 1$)

تابع همانی

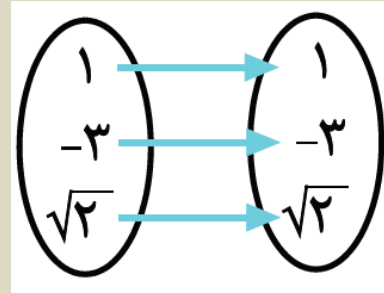
تابعی است با ضابطه $f(x) = x$. در این تابع اگر ورودی x_0 باشد، خروجی هم x_0 می‌شود.

پس در این مدل توابع مجموعه‌های دامنه و برد برابرند. نمودار این تابع همان نیمساز ناحیه اول و سوم است.

تابع همانی در واقع یک تابع چندجمله‌ای درجه یک است.



و نمایش زوج مرتبی $f = \{(1, 1), (a, a)\}$

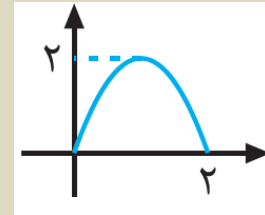


مثلا نمودار پیکانی

هر کدام مربوط به یک تابع همانی است.

نکته: هر تابع همانی، دامنه و بردش برابر است. اما هر تابعی که دامنه و بردش برابر است صرفاً همانی نیست.

، $D = R = [0, 2]$. اما همانی نیست. چون نمودارش



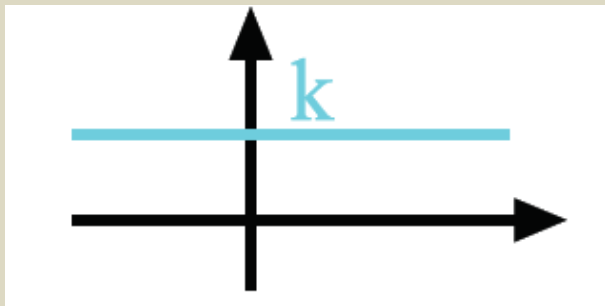
مثلا در این نمودار

نیمساز ناحیه اول و سوم نیست.

۳ تابع ثابت

تابعی است که برد آن فقط شامل یک عضو است. ضابطه آن به فرم $f(x) = k$ که k یک عدد

حقیقی است، می باشد. نمودارش هم خطی افقی در عرض k است ←



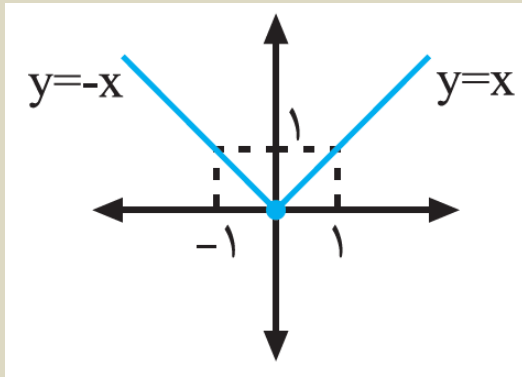
مثال: (کار، در کلاس) یک تابع همانی مثال بنزید که دامنه آن $\{\alpha, \beta, 2, 5\}$ باشد.

مثال: (کار، در کلاس) یک تابع ثابت مثال بنزید که دامنه آن ۵ عضوی باشد.

تابع قدر مطلقى

تابعى به فرم $y = |x|$. ضابطه این تابع به فرم $y = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ در مى آید.

نمودارش شبیه \vee فارسی است.



تابع چندضابطه‌ای

به توابعی به این فرم که برای هر عدد دامنه، یک معادله دارد، توابع چند ضابطه‌ای (قطعه‌ای) نامیده می‌شود.

مثال: (مثال کتاب با تغییر) نمودار تابع قطعه‌ای $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ x - 3 & x < 1 \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و بردش را بیابید.

مثال: در مثال قبلی حاصل $f(f(\sqrt{2})) + f(-1)$ را بیابید.

رسم برخی از توابع به کمک انتقال

۱: رسم $f(x) + k$: ابتدا $f(x)$ را رسم کنید، سپس نمودار f را به اندازه k و در جهت علامتش روی محور y ها حرکت بده!

۲: رسم $f(x + k)$: ابتدا $f(x)$ را رسم کنید، سپس نمودار f را به اندازه k و در خلاف جهت علامتش روی محور x ها حرکت بده!

مثال: نمودار تابع $y = -(x-1)^2 + 2$ را به کمک انتقال رسم کنید.

answer

مثال: نمودار تابع

$$y = |x + 1| + 1$$

، را به کمک انتقال رسم کنید.

answer

۱- (تمرین کتاب) الف) تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید و مقادیر $f(2)$ و $f(-50)$ و $f(100)$ و $f(-5)$ و $f(\sqrt{5})$ و $f(\frac{-3}{4})$ را بدست آورید.

ب) اگر دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید.

پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنه آن بازه $[-2, 5]$ باشد، نیز رسم کنید.

۲- (تمرین کتاب) برای یک تابع قطبی می‌دانیم که: $f(2) = 11$ و $f(0) = 7$. نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

answer

۳- (تمرین کتاب) اگر در برای تابع g داشته باشیم: $g(4) = 3$ و $g(-2) = \frac{1}{3}$ و $g(1) = 5$

و $g(0) = 2$ ، g را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

answer

۵- (تمرین کتاب) تابع $f(x) = 3x - 1$ را که دامنه آن مجموعه $\left\{\frac{1}{2}, 0, 5\right\}$ است، رسم کنید. برد

این تابع را به دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار پیکانی آن را ارائه دهید.

answer

۷- (تمرین کتاب) کدام یک از رابطه‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر معادله را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x + 2 & x \leq 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

answer

۱- (تمرین کتاب) نمودار تابعی یک سهمی است که از نقاط $(۱, -۲)$ و $(۲, -۳)$ می‌گذرد و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض a قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

answer

۹- (امتحانات سال گذشته) در تابع $f = \{(2,3)(3,1)(4,2)(1,4)\}$ مقدار $2f(2) - f(4)$ برابر با چند است؟

answer

۱۰- (امتحانات سال گذشته) مقدار a را طوری به دست آورید که رابطه $A = \{(1, 2)(3, 2a)(3, a - 7)\}$

یک تابع باشد.

answer

۱۱- (امتحانات سال گذشته) نمودار تابع $y = -|x + 1| + 2$ را رسم کنید.

answer

۱۲- (امتحانات سال گذشته) الف) نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ -1 & -1 \leq x < 1 \\ 2x+1 & x \geq 1 \end{cases}$ را رسم کنید.

ب) حاصل $f(-3) + f(1)$ را به دست آورید.

پ) حاصل $f(f(-2))$ را به دست آورید.

۱۳- (امتحانات سال گذشته) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) دامنه تابع $f(x) = x^2 - 1$ برابر $(0, +\infty)$ و برد آن نیز $(0, +\infty)$ است.

answer

ب) دامنه تابع $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$ همه اعداد حقیقی و برد آن $(2, +\infty)$ است.

answer

پ) دامنه تابع ثابت $f(x) = 2$ برابر $(-\infty, +\infty)$ است.

answer

$$f(1) = \frac{f(2)}{2} \quad \text{. ان شاء الله} \quad f(x) = 2x + 1 \quad (ت)$$

answer



فصل ۶ :

شمارش بدون شمردن

اصل جمع

پدیده‌هایی که با هم و به طور همزمان نمی‌توانند رخ دهند، تعداد حالت‌هایشان با هم جمع می‌شود. (یا)

اصل ضرب

اگر چند پدیده به صورت همزمان یا پشت سرهم رخ دهند، تعداد حالت‌هایشان در هم ضرب می‌شود. (و)

مثال: (مثال کتاب با تغییر) شفصی برای رفتن از تهران به قم دو مسیر و برای رفتن از قم به اصفهان ۳ مسیر دارد به چند طریق این شفص می‌تواند از تهران به اصفهان برود و برگردد، به طوری که در برگشت از مسیرهایی که رفته استفاده نکند؟

answer

مثال: (مثال کتاب) رمزی از ۳ حرف تشکیل شده که هر کدام می‌توانند از حروف فارسی یا انگلیسی کوچک باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

answer

نکته: در مسائل سافتن اعداد اگر بگویند با فلان ارقام (مثلا ۳، ۲، ۱) چند عدد n رقمی (مثلا ۳ رقمی) می توان

نوشت، تکرار مجاز است. (چون مثلا عددی مثل ۲۲۳ هم داریم!) در این مثال $\leftarrow 3 \times 3 \times 3 = 27$

اما اگر بگویند با جایگشت این ارقام (یعنی با تعویض جای آن‌ها) چند عدد ۳ رقمی می توان تولید کرد، دیگر تکرار

مجاز نیست.

(چون فقط شماره باشند رو عوض کنیم دیگه! در این مثال $\leftarrow 3 \times 2 \times 1 = 6$)

مثال: (مثال کتاب) با ارقام ۰، ۲، ۳، ۷، ۱۰

الف) چند عدد ۳ رقمی می توان نوشت؟
ب) چند عدد ۳ رقمی با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟
پ) چند عدد ۳ رقمی فرد با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟ (همین قسمت را برای اعداد زوج دوباره حل کنید.)

answer

فاکتوریل

$$n! = n(n-1) \times \dots \times 1$$

یعنی تعداد کل حالات قرارگیری آن n شی کنار هم که می شود $n!$

جایگشت n شی متمایز کنار هم

مثال: علی و ۴ نفر از دوستانش می فوهند روی یک نیمکت کنار هم بنشینند. به چند حالت این اتفاق می تواند بیفتد، به طوری که علی همواره وسط بنشیند؟

نکته: جایگشت n شی متمایز که k تای آن ها تکراری است می شود $\frac{n!}{k!}$

مثال: با حروف کلمه «نالان» چند کلمه ۵ حرفی متمایز می توان ساخت؟

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شی متمایز می‌شود تعداد کل انتقاب‌های r تایی از n شی متمایز، به طوری که

$$p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \Leftarrow \text{ترتیب قرار گرفتن در گروه‌های کوچک } r \text{ تایی مهم باشد. که داریم:}$$

مثال: (مثال کتاب) با حروف کلمه «بهبانگردی» و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟ چندتای آن‌ها به «ی» فتم می‌شوند؟

ب) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟

پ) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آن‌ها به گردی فتم می‌شوند؟

ت) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه «بهبان» چهار حرف اول باشد؟

ث) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه «بهبان» کنار هم باشند؟

ج) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه‌دار شروع شوند؟

ترکیب k شی از n شی می شود تعداد کل گروه های k تایی که می توان از n شی انتخاب کرد، به طوری که

ترتیب قرارگیری در گروه های k تایی مهم نباشد. در واقع می شود تعداد کل زیرمجموعه های k تایی یک مجموعه

$$\boxed{C(n, k)} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\boxed{p(n, k)}}{k!} \quad n \text{ عضوی! ترکیب همان انتخاب تصادفی است.}$$

مثال: (مثال کتاب درسی) از میان ۶ کتاب مختلف؛

الف) به چند طریق می توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب) به چند طریق می توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

نکته: هوست باشه برای مناسبه سریع تر ترکیب، داریم:

$$\binom{n}{0} = 1$$

,

$$\binom{n}{1} = n$$

,

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n \times (n - 1)}{2!}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n \times (n - 1) \times (n - 2)}{3!}$$

مثال: (مثال کتاب درسی) در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته‌ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می‌توان این کار را تشکیل داد اگر:
الف) کمیته ۴ نفره باشد؟

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر یک از ۳ کشور یک نفر در کمیته باشد؟

پ) کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً ۲ داور ایرانی داشته باشد؟

ت) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی داشته باشد؟

ث) کمیته ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد؟

ج) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟

۱- (تمرین کتاب) در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ فیابان، و در هر فیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل تعداد کارخانه‌هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چندتا است؟

answer

۲- (تمرین کتاب) یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سوال ۴ گزینه‌ای و ۵ سوال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به سوال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر: الف) مجبور باشد به همه سوال‌ها جواب دهد؟

ب) بتواند سوال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

۴- (تمرین کتاب) در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

answer

۵- (تمرین کتاب) با حروف کلمه «گل پیرا» و بدون تکرار حرف:

الف) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آن‌ها با «گل» شروع می‌شوند؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت؟

پ) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها دو حرف «پ» و «ر» کنار هم آمده باشند؟

ت) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها دو حرف «پ» و «ر» کنار هم آمده باشند؟

ث) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

۶- (تمرین کتاب) یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آفرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود، هرگاه:

الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

answer

۷- (تمرین کتاب) گل فروشی در فروشگاه خود ۱۵ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شافه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

answer

۱- (تمرین کتاب) هفت نقطه A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

answer

۹- (تمرین کتاب) یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این

آشپز چند طعم مختلف می‌تواند درست کند هرگاه:

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد؟

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟

پ) سه ادویه هستند که هر سه با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟

ت) ادویه‌ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می‌شوند که هیچ یک از ادویه‌های دسته اول با هیچ یک از ادویه‌های دسته دوم سازگاری ندارند؟

۱۰- (امتحانات سال گذشته) با ارقام ۰ و ۱ و ۵ و ۷ و ۸ و بدون تکرار ارقام:

الف) چند عدد سه رقمی فرد می توان نوشت؟

ب) چند عدد سه رقمی بزرگ تر از ۷۰۰ می توان نوشت؟

پ) چند عدد سه رقمی مضرب ۵ می توان نوشت؟

۱۱- (امتحانات سال گذشته) اگر $P(n, 4) = 12C(n-2, 2)$ باشد، مقدار n را به دست آورید.

answer

۱۲- (امتحانات سال گذشته) به چند طریق می‌توان با ۵ دفتر و ۳ پسر یک صف تشکیل داد به طوری که هیچ دو پسری کنار هم قرار نگیرند؟

answer

۱۳- (امتحانات سال گذشته) می‌فواهیم از بین ۱۰ نفر که ۳ تای آنها برادرند، یک تیم ۴ نفره انتخاب کنیم. به چند حالت می‌توانیم این تیم را انتخاب کنیم به شرطی که:

الف) هیچ شرطی نداشته باشیم. ب) هیچ برادری نباشد. پ) حداقل یک برادر در تیم باشد.

۱۴- (امتحانات سال گذشته) از بین تعدادی کتاب مفتلف می‌فواهیم ۳ کتاب را انتفاب کنیم و در قفسه‌ای بپینیم. اگر تعداد حالت‌های مفتلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب‌ها چند تا است؟

answer



فصل ۷ : آمار و احتمال

پیشامد تصادفی

به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای یک پیشامد تصادفی می‌گویند. یک پیشامد می‌تواند آنقدر کوچک باشد که عضوی در فضای نمونه‌ای نداشته باشد (تهی) و می‌تواند آنقدر بزرگ باشد که برابر خود فضای نمونه‌ای شود.

پیشامد تهی (نشدنی - غیرممکن)

پیشامدی است که عضوی در فضای نمونه‌ای ندارد و امکان ندارد که اتفاق بیفتد. مثلاً پیشامد آمدن یک عدد دو رقمی در پرتاب یک تاس سالم، نشدنی است.

پدیده یا آزمایش تصادفی

آزمایشی که نتیجه قطعی آن از قبل به طور دقیق قابل پیش‌بینی نیست. اما مجموعه کل نتایج ممکن آن قابل پیش‌بینی است. مثل پرتاب تاس که قبل از پرتاب نمی‌توانیم بگوییم چند می‌آید، اما مجموعه نتایج ممکن آن که همیشه $\{1, 2, \dots, 6\}$ قابل پیش‌بینی!!

فضای نمونه‌ای (S)

مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده می‌گوییم.

پیشامد قطعی (حتمی - شدنی)

فرد فضای نمونه‌ای است، پس قطعا رخ می‌دهد. چون نتیجه آزمایش قطعا یکی از اعضای فضای نمونه‌ای است.

برآمد

نتیجه آزمایش تصادفی را برآمد می‌گوییم. برآمد اگر عضو پیشامد A باشد، می‌گوییم پیشامد A اتفاق افتاده و اگر عضو پیشامد A نباشد می‌گوییم پیشامد A اتفاق نیفتاده.

مثال: فضای نمونه‌ای در یک آزمایش تصادفی به صورت $S=\{8,5,a,b\}$ است. اگر پیشامد A به صورت

$A=\{8,5\}$ و نتیجه آزمایش $\{a\}$ شده باشد، صحیح و غلط بودن موارد زیر را مشخص کنید. با تشکر...

الف) پیشامد A رخ داده است.

ب) پیشامد A رخ نداده است.

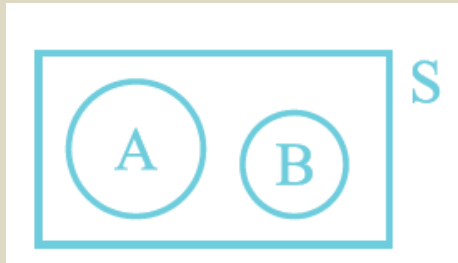
پ) A یک پیشامد قطعی است.

ت) $\{b\}$ یک پیشامد نشدنی است.

ث) $\{8,5,a,b\}$ یک پیشامد هتمی است.

پیشامد تصادفی

دو پیشامد A و B را زمانی ناسازگار می‌گوییم که نتوانند با هم رخ دهند. یعنی $A \cap B = \emptyset$. نمودار ون زیر، دو پیشامد جدا از هم A و B را نشان می‌دهد:



$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cap B) = 0$$

مثال: (مثال کتاب) فرض کنید خانواده‌ای ۴ فرزند دارد. در هر مورد از موارد زیر، پیشامد را به صورت یک مجموعه نشان دهید.

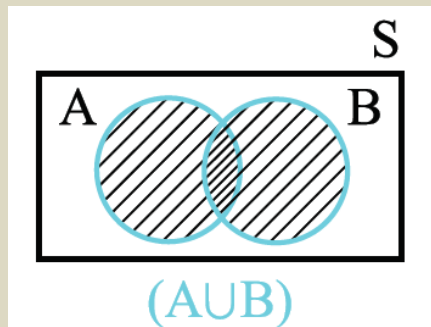
الف) پیشامد اینکه دقیقاً یک دختر در این خانواده متولد شده باشد.

ب) پیشامد اینکه حداکثر یک دختر در خانواده متولد شده باشد.

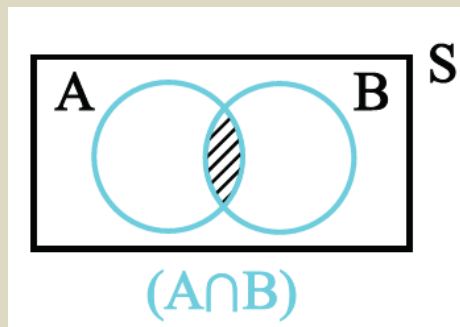
پ) پیشامد اینکه تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشند.

ت) پیشامد اینکه تعداد فرزندان پسر از دختر بیشتر باشد.

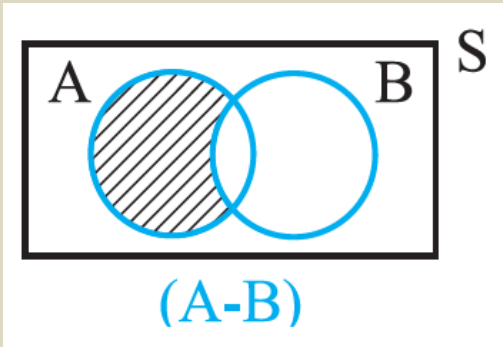
پیشامدها و پرخی اعمال روی آنها



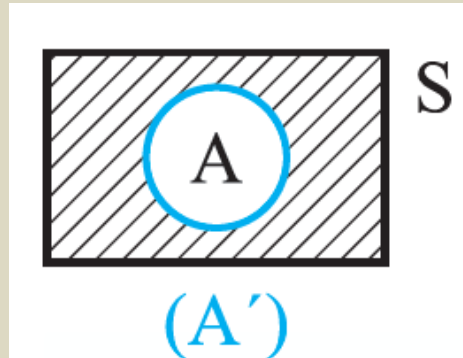
الف) اجتماع دو پیشامد A و B : حداقل یکی از آنها رخ بدهد
(یا A یا B یا هر دو)



ب) اشتراک دو پیشامد A و B : یعنی هر دو با هم رخ بدهند. (هم A و هم B)



پ) تفاضل دو پیشامد A و B : یعنی A رخ بدهد
و B رخ ندهد. (فقط A رخ دهد)



ت) متمم A : یعنی هر چیزی رخ بدهد جز A .

مثال: (مثال کتاب درسی) یک تاس و دو سکه را با هم می‌اندازیم؛
الف) فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

ب) پیشامد آنکه «هر دو سکه رو و تاس زوج باشد» را تشکیل دهید.

پ) پیشامد آنکه «هر دو سکه پشت یا تاس ۵ بیاید» را تشکیل دهید.

احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه گیری شانس)

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

احتمال رخداد پیشامد A در فضای نمونه‌های S می‌شود:

نکته: هواستان باشد که $0 \leq p(A) \leq 1$. عدد $p(A)$ هر چقدر به ۱ نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد A

بیشتر و هر چقدر به ۰ نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد A کمتر است.

مثال: (مثال کتاب) هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۲، ۳، ۴ و بدون تکرار رقم می‌توان ساخت را روی یک کارت می‌نویسیم و آن‌ها را در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. سپس یک کارت برمی‌داریم. اگر پیشامدهای **A** و **B** را به ترتیب «فارج شدن عدد زوج» و «فارج شدن عدد فرد» تعریف کنیم، شانس رخداد کدام پیشامد بیشتر است؟

answer

مثال: (مثال کتاب درسی) در جعبه‌ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه ۳ مهره به تصادف

فارج کنیم، مقدار احتمال دارد: الف) هر سه مهره آبی باشند. ب) هر سه مهره هم‌رنگ باشند.

پ) دقیقاً ۲ مهره هم‌رنگ باشند. ت) حداکثر ۱ مهره قرمز فارج شود.

answer

برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S همواره داریم:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

نکته: *هواست باشد، اگر A و B ناسازگار باشند، $p(A \cap B) = 0$ و در نتیجه:*

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

مثال: (مثال کتاب) اگر دو تاس را با هم بیندازیم، چقدر احتمال دارد:
الف) هر دو تاس زوج باشد؟
ب) مجموع ۲ تاس ۸ یا هر دو فرد باشد؟

answer

ت) مجموع ۲ تاس کمتر از ۱۱ باشد؟

ث) حاصل ضرب ۲ عدد، رو شده ۱۲ باشد؟

answer

مثال: (مثال کتاب) اگر حروف کلمه "بهانگردی" را به تصادف کنار هم قرار دهیم، چقدر احتمال دارد که:
الف) حرف «ی» آخر باشد؟ ب) دو حرف «ی» و «د» کنار هم باشند؟ پ) با حرف «ج» شروع شود و به حرف «ی» ختم شود؟

answer

آمار

آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار

مجموعه روش‌هایی است برای جمع‌آوری داده‌ها، سازماندهی، نمایش و تفسیر آن‌هاست که منجر می‌شود به قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد آزمایش‌های تصادفی.

جامعه (جمعیت)

می‌شود مجموعه تمام افراد یا اشیا‌یی که در باره یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت می‌گیرد. هر یک از این افراد یا اشیا را عضو جامعه می‌نامیم.

اندازه یا حجم جامعه

تعداد اعضای یک جامعه را می‌گویند. برای مثال دانش‌آموزان یک مدرسه می‌توانند یک جامعه به حساب بیایند که تعداد آن‌ها، حجم این جامعه است.

نکته: برای بدست آوردن اطلاعات اعضای یک جامعه دو روش وجود دارد:

A اگر جمع جامعه بزرگ باشد از نمونه‌گیری استفاده می‌کنند.

B اگر جمع جامعه کوچک باشد از سرشماری استفاده می‌کنند.

نمونه

می‌شود بخشی از جامعه که برای مطالعه انتخاب می‌شوند. هر یک از افراد یا اشیا انتخاب شده را عضو نمونه می‌گویند.

اندازه یا حجم نمونه

تعداد اعضای نمونه را می‌گویند. برای مثال دانش‌آموزان کلاس دهم الف، به عنوان یک نمونه از جامعه (مدرسه) می‌باشند و هر یک از دانش‌آموزان این کلاس، عضو نمونه به حساب می‌آیند.

تعریف متغیر و مقدار متغیر

متغیر یک ویژگی از اعضای جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند. عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر می‌نامند.

۱ متغیر کمی:

متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری می‌باشند. مثلاً تعداد فرزندان یک خانواده و وزن آن‌ها متغیر کمی اند. متغیر کمی هم خود به ۲ دسته تقسیم می‌شود:

الف) متغیر کمی پیوسته: متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها نیز بتواند اختیار کند. مقدار آن از طریق اندازه‌گیری بدست می‌آید و طبیعتاً می‌تواند یک عدد اعشاری شود.

برای مثال وزن یک دانش‌آموز می‌تواند 46kg ، 47kg یا هر مقدار بین این دو باشد.

ب) متغیر کمی گسسته: متغیری است که پیوسته نباشد، مقدار آن بوسیله اندازه‌گیری و از طریق شمارش بدست می‌آید و طبیعتاً فقط می‌تواند مجموعه اعداد حسابی را اختیار کند.

برای مثال تعداد فرزندان یک خانواده یک متغیر کمی گسسته است.

۲ متغیر کیفی:

متغیرهایی اند که قابل اندازه‌گیری نمی‌باشند. مثلاً گروه فونی افراد و پاسخ سوال «میزان لذت بردن از آشپزی» متغیرهایی کیفی اند. این متغیر نیز خودش دو نوع دارد.

الف) متغیر کیفی ترتیبی: متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد. برای مثال سطح تحصیلات (دیپلم، کارشناسی، کارشناسی ارشد، دکتری).

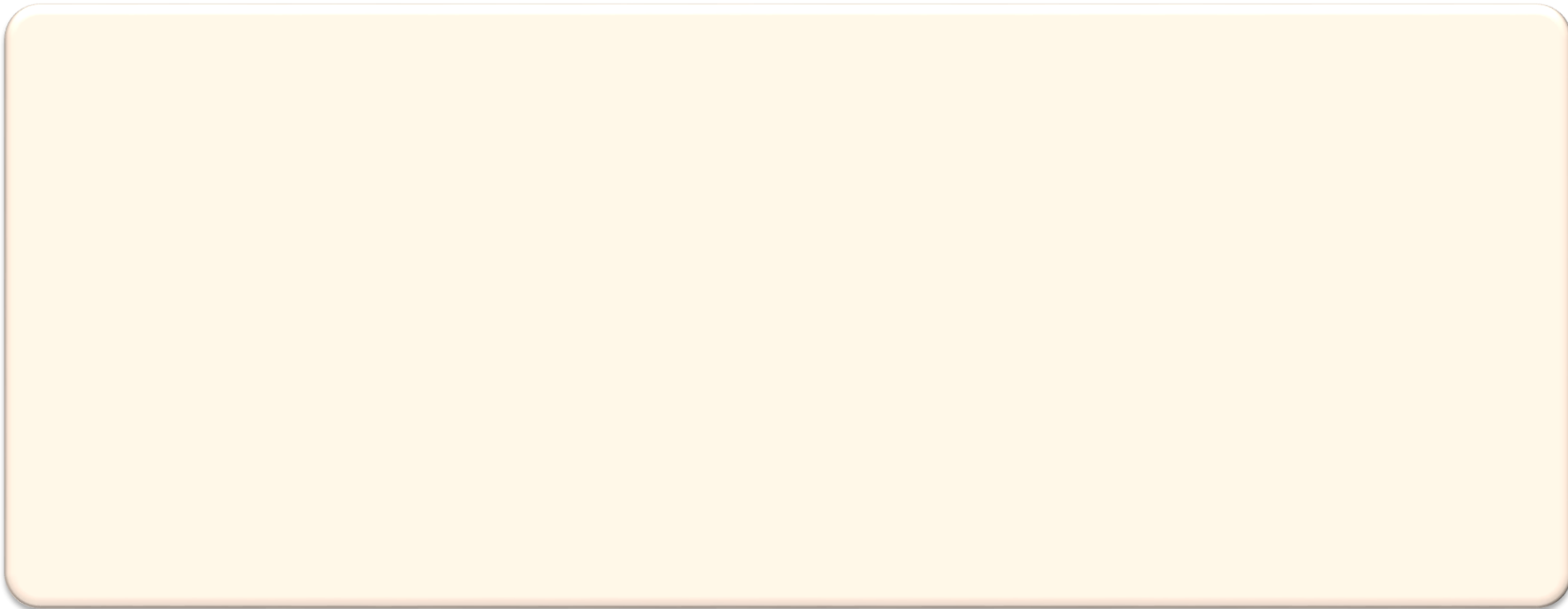
ب) متغیر کیفی اسمی (غیر ترتیبی): متغیری کیفی است که ترتیبی نیست، پس طبیعتاً دارای ترتیب طبیعی‌ای نمی‌باشد.

برای مثال جنسیت (مرد و زن) یا رنگ لباس‌های یک فروشگاه.

۱- (تمرین کتاب) سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید دو سکه دیگر را می‌اندازیم:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. ب) پیشامد آن که «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید.

پ) پیشامد آن که «حداقل ۲ سکه رو بیاید» را مشخص کنید.



۲- (تمرین کتاب) می‌فواهیم از بین ۳ دانش‌آموز کلاس دهم رشته ریاضی و ۲ دانش‌آموز دهم رشته تجربی یک تیم دو نفره تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت گیرد، چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو نفر، از دانش‌آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟ ب) هر دو نفر، هم رشته باشند؟

پ) ۱ نفر از رشته ریاضی و ۱ نفر از رشته تجربی باشد؟

۳- (تمرین کتاب) یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری **A** و **B** را می‌پذیرد. اگر ۳۴ درصد از مشتریان کارت نوع **A** ($p(A) = \frac{34}{100}$) و ۶۲ درصد کارت نوع **B** و ۱۵ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، بپذیرد احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

answer

۴- (تمرین کتاب) اگر ۷ نفر که دو نفر آن‌ها برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد:
الف) دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟
ب) یکی از آن‌ها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟

answer

۵- (تمرین کتاب) کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است؟
الف) اندازه جامعه کمتر از اندازه نمونه است.
ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه است.
پ) نمونه، زیرمجموعه‌ای از جامعه است.

answer

۶- (تمرین کتاب) نوع هر متغیر را بنویسید.

الف) میزان بارندگی بر حسب سانتی‌متر در یک شهر

ب) نوع بارندگی (باران، برف)

پ) تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند.

ت) میزان دمای هوا

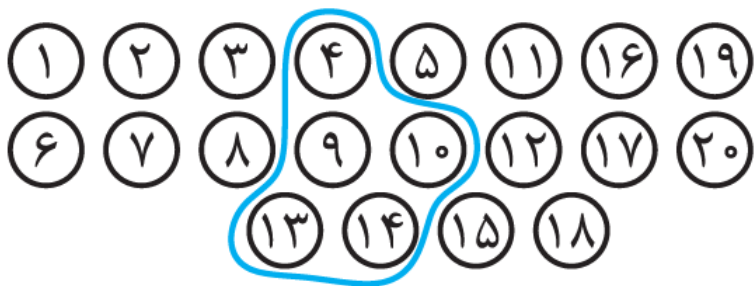
ث) شدت آلودگی هوا (زیاد، متوسط، کم)

ج) انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)

چ) شدت بارندگی (زیاد، متوسط، کم)

۱- (تمرین کتاب) شکل زیر یک جامعه فرضی را نشان می‌دهد که اعضای آن را با شماره‌های ۱ تا ۲۰ مشخص

کرده‌ایم. همپنین اعضای نمونه با فظ آبی رنگ انتخاب شده‌اند. به سوالات زیر پاسخ دهید:



الف) اندازه جامعه چه عددی است؟

ب) اندازه نمونه انتخاب چه عددی است؟

پ) اعضای نمونه انتخابی را بنویسید؟

۹- (امتحانات سال گذشته) دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه مجموع دو تاس کمتر از ۱۵ باشد چقدر است؟

۱۰- (امتحانات سال گذشته) در جعبه‌ای ۷ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید خارج شده است؟

۱۲- (امتحانات سال گذشته) می‌فواهیم مدت زمانی را که دانش‌آموزان یک مدرسه صرف مطالعه می‌کنند، بررسی کنیم. به همین منظور نفرات اول تا سوم لیست هر کلاس را انتخاب می‌کنیم. در این بررسی، جامعه، نمونه، متغیر مورد بررسی و نوع آن را مشخص کنید.

answer

۱۳- امتحانات سال گذشته) نوع هر متغیر را مشخص کنید.

الف) میزان تحصیلات

پ) تعداد طبقات یک سافتمان

ب) گروه فونی افراد
ت) زمان تاثیر یک دارو

answer