ریاضی ۲

فصل ۱ :

جبر و حساب

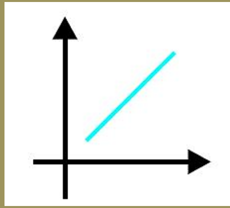
(۶ نمره)

نوشتن معادله خط $y = mx + h$

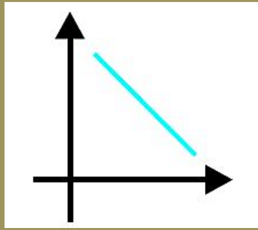
به دو روش کلی می‌توان معادله خط را نوشت:

روش اول: دو نقطه $A\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ را بدهند؛ $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$

روش ۲: با داشتن شیب **m** و نقطه $A\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ روی خط $y - y_0 = m(x - x_0)$



شیب مثبت باشد، خط صعودی است. (یعنی با افزایش **x**، **y**اش هم افزایش می‌یابد.)

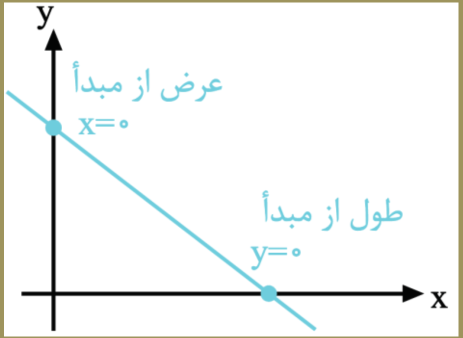


شیب منفی باشد، خط نزولی است. (یعنی با افزایش **x**، **y**اش کاهش می‌یابد.)

مفهوم عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط

عرض از مبدأ، محل برخورد خط است با محور عرض‌ها، (x را صفر می‌دهی مقدار y ای که به‌دست می‌آید عرض از مبدأ است.)

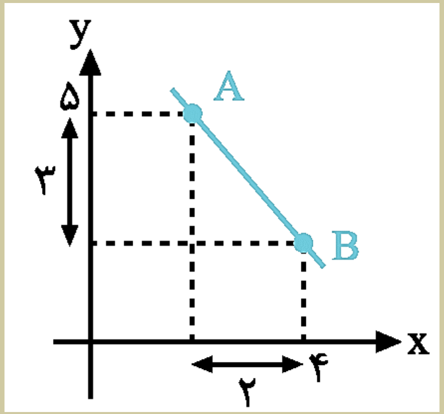
و طول از مبدأ هم محل برخورد خط با محور طول‌هاست (y را صفر بده! X ای که به دست می‌آید طول از مبدأ است.)



نکته: در معادله استاندارد خط، یعنی $y = mx + h$

ضریب x شیب و h عدد ثابت عرض از مبدأ است.

مثال: مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط گذرنده از دو نقطه A و B را در شکل مقابل به دست آورید.



answer

روش رسم نمودار یک خط

می‌توانید به **x**، دو مقدار برهید و دو مقدار برای **y**بگیرید، بعد این دو نقطه را به هم وصل کنید. اما بـه عقیـده بنـده، عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط را بیابید و به هم وصل کنید. این‌گونه نمودارش دقیق‌تر درمی‌آید.

شرط موازی بودن و عمود بودن دو خط

دو خط با هم موازی‌اند اگر شیب آن‌ها برابر باشد و بر هم عمودند اگر شیب‌های آن‌ها عکس و قرینـه یکـدیگر باشد. (یعنی ضرب شیب‌های آن‌ها بشود ۱−)

فاصله دو نقطه از هم

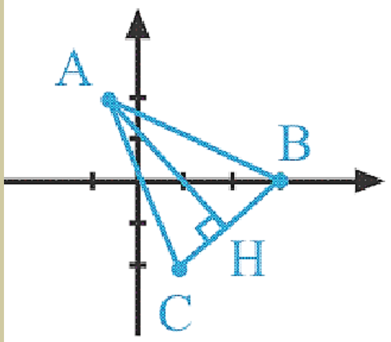
فاصله دو نقطه $A\left|\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\right.$ از هم می‌شود: $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

مثال: (تمرین کتاب) وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

$l: ۲x - y = ۱$ $\quad d: y = ۲x - ۳$ $\quad \Delta: x + ۲y = ۰$

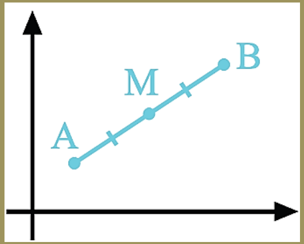
answer

مثال: نقاط $C(1,-2)$ ، $B(3,0)$ و $A(-1,2)$ مختصات سه رأس مثلث ABC هستند، معادله ارتفاع AH و طول آن را به‌دست آورید.



answer

نقطه وسط پاره‌خط AB



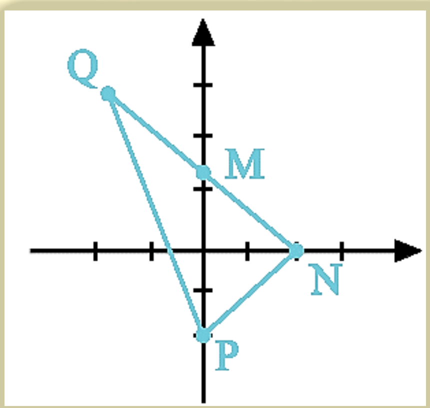
$$\Rightarrow M\left|\begin{array}{l}\dfrac{x_A + x_B}{۲}\\ \dfrac{y_A + y_B}{۲}\end{array}\right.$$

مثال: (تمرین کتاب) $A(۱۴,۳)$ و $B(۱۰,-۱۳)$ را در نظر بگیرید.

الف) فاصله مبدأ مختصات را از وسط پاره‌خط AB به دست آورید.   ب) معادله عمود منصف پاره خط AB را بنویسید.

answer

مثال: اگر نقاط $P(0,-2)$ ، $N(2,0)$ ، $Q(-2,3)$ رئوس مثلث PNQ باشد، میانه PM را محاسبه کنید.



answer

فاصله دو خط

برای ۲ خط موازی به فرم $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ قابل تعریف است که می‌شود: $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

فاصله نقطه از خط ؛ فاصله $A\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با: $d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

یک مثال ببینید: مثلا فاصله ۲ خط موازی $4x-3y=-5$ و $-8x+6y=-7$:

answer

روش تغییر متغیر برای حل معادله درجه دوم

معادلات دیگری وجود دارند که به یک معادله درجه دوم قابل تبدیل هستند، در معادلاتی که فرم کلی $a\bigcirc^{۲}+b\bigcirc+c=۰$

را دارند، اگر تغییر متغیر $\bigcirc=t$ را برای آن‌ها اعمال کنید، به راحتی قابل حل می‌شوند.

مثال: می‌خواهیم معادله $(۳x^{۲}-۱)^{۲}-۱۳(۳x^{۲}-۱)+۲۲=۰$ را حل کنیم.

answer

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲

$$\text{sum}\ S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$\text{product}\ P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

اگر $\Delta > 0$ باشد می‌توان جمع و ضرب دو ریشه را از روابط زیر به‌دست آورد:

مثال: در معادله $-2x^2 + x + 5 = 0$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها (P,S) را بیابید.

answer

نوشتن معادله درجه دوم با داشتن S و P

در یک معادله درجه دوم اگر S جمع ریشه‌ها و P ضرب آن‌ها باشد، معادله به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ می‌باشد!

مثال: محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر است. اندازه طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

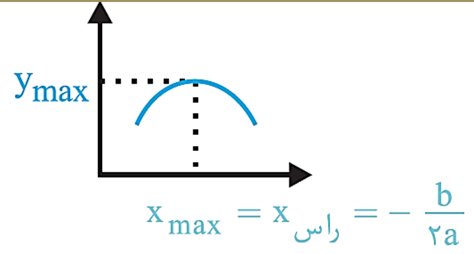
answer

ماکزیمم یا مینیمم سهمی

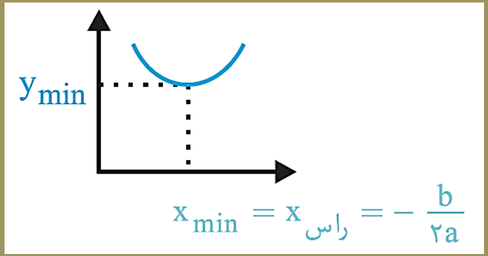
همانطور که می‌دانی (حالا یا نمی‌دانی!!) نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$

به صورت  یا  است، که به آن سهمی می‌گویند.

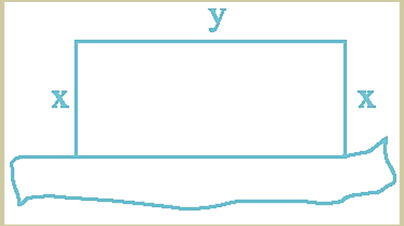
حالا اگر $a < 0$ ، سهمی رو به پایین است و در طول رأسش (یعنی $x = -\frac{b}{2a}$) به بیشترین (ماکزیمم) مقدار خود می‌رسد.



حالا اگر $a > 0$ ، سهمی رو به بالا است و در طول رأسش (یعنی $x = -\frac{b}{2a}$) به کمترین (مینیمم) مقدار خود می‌رسد.



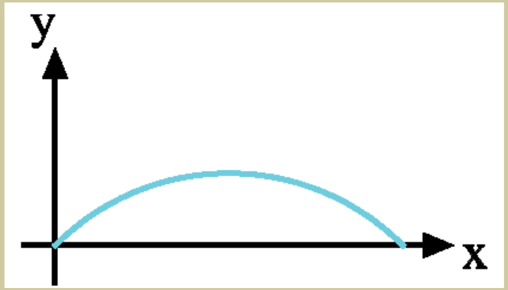
مثال: یک ماهیگیر می‌خواهد در کنار رودخانه محوطه‌های مستطیل شکل را فنس‌کشی کند. او تنها هزینه ۱۰۰ متر فنس‌کشی را در اختیار دارد. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.



answer

نکته: صفرهای تابع درجه ۲: به طور کلی به نقاط برخورد یک تابع با محور **X**ها، صفرهای آن تابع می‌گویند. چرا که مقدار تابع در آن‌جا می‌شود صفر بی‌صاحاب!!

مثال: (مثال کتاب) فوتبالیستی توپی را با زاویه ۴۵ درجه نسبت به سطح زمین با سرعت اولیه $۲۰ \, m/s$ شوت می‌کند. مسیر حرکت توپ، مانند شکل مقابل است که تابع مسیر آن به صورت $y = \frac{-۱}{۴۰}x^۲ + x$ می‌باشد، نقطه برخورد توپ با زمین را به‌دست آورید.



answer

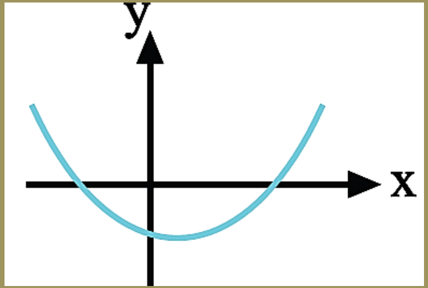
مشخص کردن علامت a و b و c از روی نمودار: $y = ax^{2} + bx + c$

۱- علامت **a**: اگر جهت سهمی رو به بالا بود، $a > 0$ و اگر رو به پایین بود، $a < 0$ است.

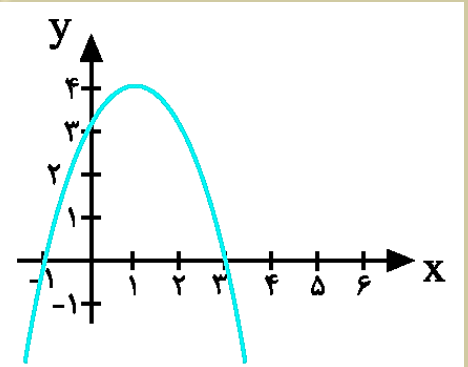
۲- علامت **c**: اگر $x = 0$ ، مقدار عرض از مبدأ سهمی به‌دست می‌آید که می‌شود $y = c$ ، پس **c** همان عرض از مبدأ یا محل برخورد سهمی با محور **y**هاست!

۳- علامت **b**: طول رأس سهمی می‌شود $x = \frac{-b}{2a}$ با توجه به اینکه علامت **a** را یافتیم و علامت طول رأس سهمی را هم از نمودار خواهیم یافت، علامت **b** مشخص می‌شود.

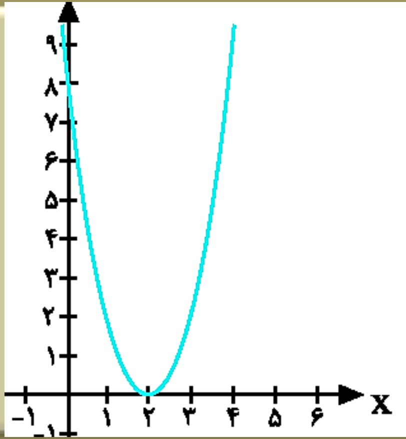
مثلا به سهمی مقابل دقت کنید :



مثال: معادله سهمی‌های زیر را بنویسید.



answer



answer

معادلات گویا و رادیکالی

عبارت گویا: یک عبارت کسری که صورت و مخرجش چندجمله‌ای است.

مثلا $\frac{۲x^{۲}-۱}{۴x^{۲}-۵x+۱}$ یک عبارت گویاست.

معادلات گویا: گونه‌ای از معادلات است که از جمع و تفریق چند عبارت گویا تولید می‌شود.

روش حل معادلات گویا

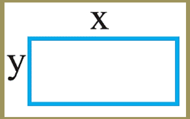
همه‌ی عبارات را به یک سمت می‌بریم، طوری که مساوی صفر شوند. بعد بین همه‌ی آن‌ها مخرج مشترک می‌گیریم، این‌گونه عبارت تبدیل به یک کسر به فرم $\frac{P(x)}{Q(x)}=۰$ می‌شود. می‌دانیم کسری مساوی صفر است که صورتش صفر باشد، در نتیجه باید $P(x)=۰$. در انتها جواب‌ها را در مخرج چک می‌کنیم که مخرجی را صفر نکنند.

مثال: (فعالیت کتاب درسی) معادله $\frac{x-۲}{x^۲-x}=\frac{۲}{x+۱}-\frac{x}{x^۲-۱}$ را حل کنید.

answer

مستطیل طلایی

مستطیلی است که در آن نسبت مجموع طول و عرض آن به طول آن برابر نسبت طول به عرض آن باشد. یعنی مثلا اگر در



داشته باشیم: $\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}$ نسبت طول به عرض این مستطیل می‌شود $\frac{x}{y}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}=۱/۶۱۸$ که این عدد به عدد طلایی معروف است!

معادلات رادیکالی

معادلاتی هستند که در آن‌ها، عبارت رادیکالی شامل مجهول وجود دارد. (در کتاب درسی فقط رادیکال‌های با فرجه ۲ بررسی می‌شوند.)

روش حل: برای حل، جملات معادله را طوری در طرفین تساوی جابه‌جا کنید که رادیکال در یک طرف تنها بماند. سپس طرفین را به توان فرجه رادیکال برسانید و در صورت لزوم این عمل را تکرار کنید تا رادیکال‌ها از بین بروند.

در آخر جواب‌ها را در معادله‌ی اولیه (اونی که هنوز به توان نرسیده) چک کنید، اگر در آن صدق کردند قابل قبولند! چرا که با به توان ۲ رساندن، ریشه‌های خارجی یا فیک تولید می‌شوند!

مثال: (کار در کلاس) بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه حقیقی هستند؟

$\sqrt{t}+۲=۰$

$\sqrt{۱-x}+\sqrt{x-۲}=۰$

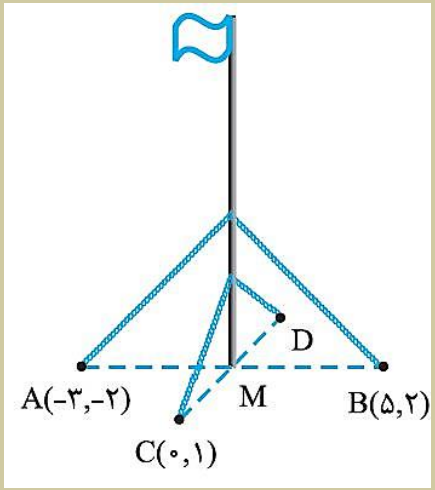
$\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲x+۳}+۱=۰$

answer

answer

answer

۱- (تمرین کتاب) یک میله پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است؛ به طوری که فاصله هر نقطه تا میله برابر است با فاصله‌ی نقطه‌ی مقابل آن تا میله. مختصات نقطه D را به دست آورید.



answer

۲- (تمرین کتاب) یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y = ۲a - ۱$ واقع است. اگر $A(۳,۰)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

answer

۳- (تمرین کتاب) الف) نشان دهید دو خط با معادلات $5x-12y+8=0$ و $-10x+24y+10=0$ با یکدیگر موازیند. ب) فاصله این دو خط را محاسبه کنید.

answer

۴- (تمرین کتاب) طول جغرافیایی تبریز تقریبا ۴۶ درجه شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود ۳۸ درجه شمالی است. برای راحتی، می‌توانیم موقعیت این شهر را به طور خلاصه، به صورت **(۴۶,۳۸)** نشان دهیم. این اطلاعات در مورد چابهار به صورت **(۶۱,۲۵)** است. با فرض اینکه مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی برابر **۱۱۰km** باشد، مطلوب است محاسبه فاصله تقریبی این دو شهر.

answer

۵- (تمرین کتاب) معادله زیر را حل کنید.

$$x^{۴} - ۸x^{۲} + ۸ = ۰$$

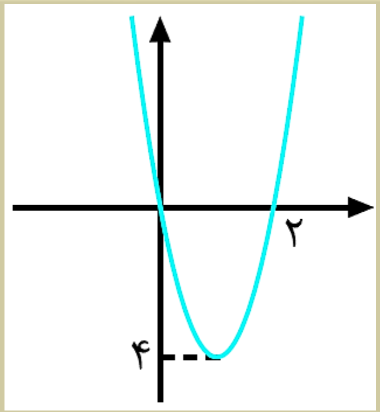
answer

۶- (تمرین کتاب) استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که:

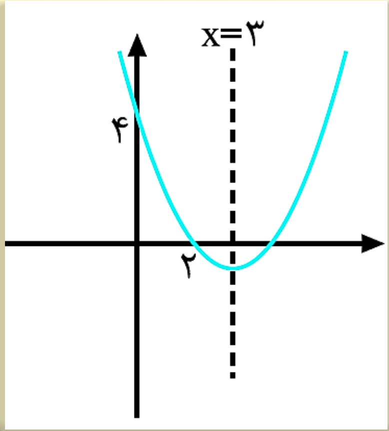
الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.   ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

answer

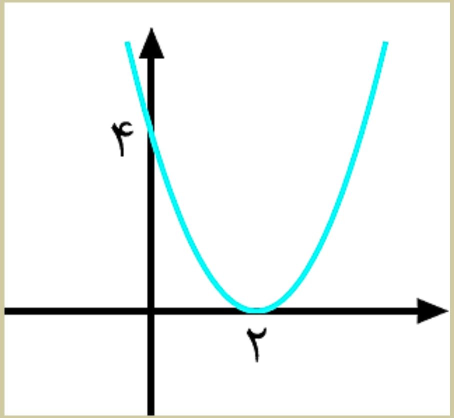
۷- (تمرین کتاب) معادله سهمی‌های زیر را بنویسید.



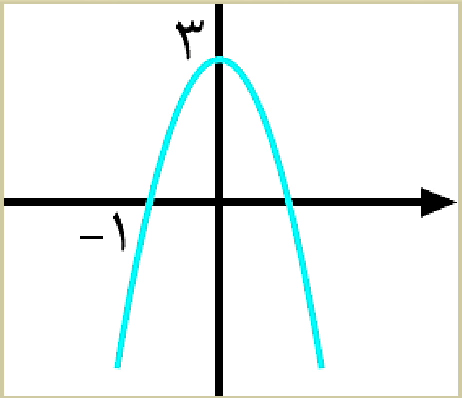
answer



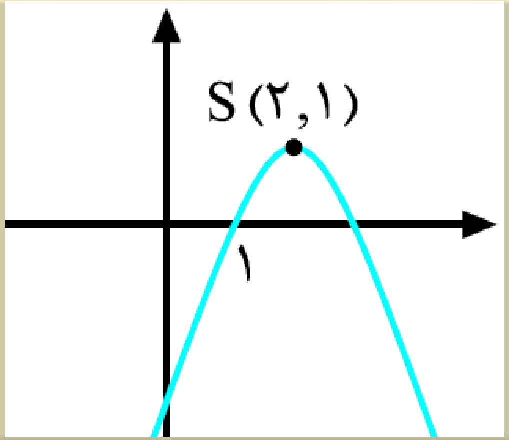
answer



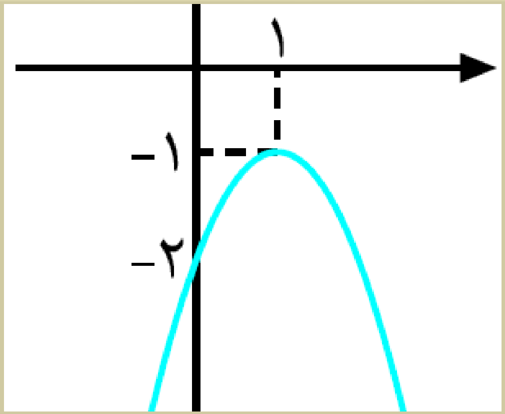
answer



answer



answer



answer

۸- (تمرین کتاب) هر یکی از معادلات زیر را حل کنید.

answer

۸- (تمرین کتاب) هر یکی از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{x-۱}{x-۳}=\frac{x+۱}{x+۴}+\frac{۲x}{x-۳}$

answer

ب) $\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲x-۵}=۱$

answer

پ) $\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}=2$

answer

۹- (تمرین کتاب) علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از حروف‌چینی مطالب، او معمولا ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

answer

۱۰- (امتحانات سال گذشته) دو خط به معادله‌های $۲x+۳y=۵$ و $ax-۲y=۳$ را در نظر بگیرید. a را طوری بیابید که:

الف) این دو خط با هم موازی باشند. ب) این دو خط بر هم عمود باشند.

answer

۱۱- (امتحانات سال گذشته) مقدار m را چنان بیابید که مجموع ریشه‌های معادله $۲x^{۲} - (m+۱)x - ۳m = ۰$ برابر با ۳ باشد.

answer

۱۲- (امتحانات سال گذشته) مثلث ABC را با رأس‌های $A(۱,۳)$ و $B(۱,۱)$ و $C(۵,۱)$ در نظر بگیرید.

الف) مختصات نقطه M وسط پاره‌خط BC را بیابید. ب) طول میانه AM را بیابید.

answer

۱۳- (امتحانات سال گذشته) معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$-۷x^{۳} = ۱ - ۸x^{۶}$$

answer

۱۴- (امتحانات سال گذشته) معادله خط گذرنده از نقطه $\mathbf{A(۲,۴)}$ را بنویسید به طوری که با خط $\mathbf{y = ۳x + ۲}$ موازی باشد.

answer

فصل ۲ :

هندسه

(۶ نمره)

ترسیم‌های هندسی

تعریف مکان هندسی: مکان هندسی مجموعه‌ای از نقاط است که دارای ویژگی A می‌باشند و هر نقطه که دارای ویژگی A باشد، در آن مکان هندسی است قطعاً!

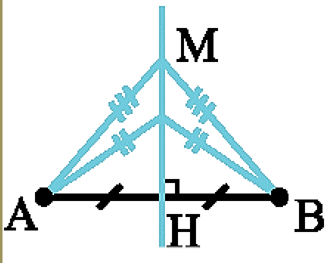
مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ثابت ۱cm قرار دارند، کدام است؟

answer

مثال : (مشابه فعالیت کتاب) مثلثی رسم کنید که طول اضلاعش ۵ و ۴ و ۳ واحد طول باشد.

answer

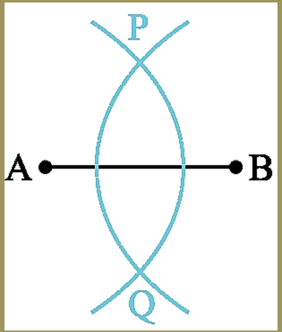
برخی خواص عمودمنصف و ترسیم آن



تعریف عمودمنصف: عمودمنصف مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر پاره‌خط مفروض AB به یک فاصله‌اند.

رسم عمودمنصف یک پاره‌خط

پاره‌خط AB را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز Bدو کمان رسم کنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاط Pو Q قطع کنند.



فاصله Pو Q از دو سر پاره‌خط یکسان است. پس روی عمودمنصف AB قرار دارند.

در نتیجه PQ عمودمنصف AB است.

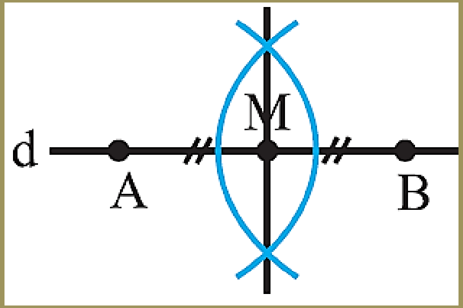
مثال: (تمرین کتاب) مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. عمودمنصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آن‌ها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

answer

نکته: محل برخورد عمودمنصف‌های یک مثلث، مرکز دایره محیطی این مثلث است.

رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن

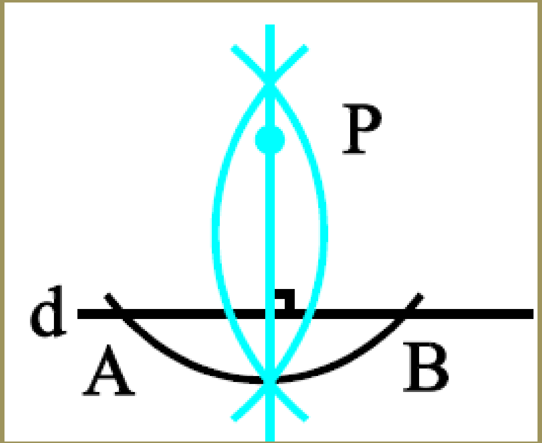
به شعاع دلخواه و به مرکز M، دو کمان طوری رسم کنید که خط d را در دو نقطه A و B قطع کند. در نتیجه M وسط پاره‌خط AB است. حالا عمودمنصف پاره‌خط AB را با روشی که در قسمت قبل گفتیم رسم کنید. M روی عمودمنصف AB است. در نتیجه خط عمود بر خط d و گذرنده از نقطه M رسم شد!



رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیرواقع بر آن

به مرکز P و شعاع دلخواه، یک کمان طوری رسم کنید که خط d را در دو نقطه A و B قطع کند، طبیعتا فاصله نقطه P از دو نقطه A و B به یک اندازه است. در نتیجه P روی عمودمنصف AB است. حالا باید عمودمنصف AB را رسم کنیم که از نقطه P می‌گذرد.

در نتیجه خطی که از نقطه P بگذرد و بر خط d عمود باشد، رسم شد.



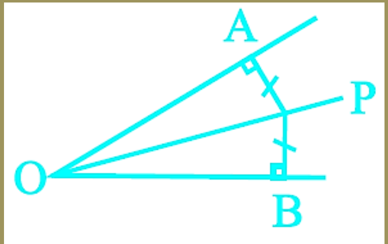
رسم خط موازی با یک خط، از یک نقطه، غیرواقع بر آن

خط d_1 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه P بگذرد و بر خط d عمود باشد (در قسمت قبل گفته شد).

حالا خط d_2 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه P بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد. طبق عکس قضیه خطوط موازی و مورب، چون $P_1 = H_1 = 90^\circ$ ، پس دو خط d_2 و d موازی هم و مورب d_1 بوده‌اند.

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

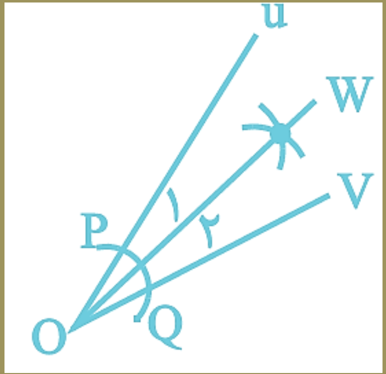
تعریف نیمساز: نیمساز یک زاویه ، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشند.



رسم نیمساز یک زاویه

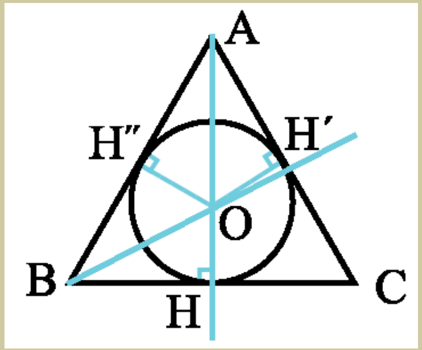
توضیحات بنده را روی شکل دنبال کنید.

ابتدا دهانه پرگار را به مقدار دلخواه باز کنید و کمانی رسم کنید تا اضلاع زاویه را در نقاط **P** و **Q** قطع کنند (در نتیجه (۱) $OP = OQ$) دهانه پرگار را کمی بازتر کنید، بیش از نصف طول پاره‌خط **PQ** و یک بار به مرکز **P** و بار دیگر به مرکز **Q** دو کمان رسم کنید تا یکدیگر را در نقطه **W** قطع کنند. (پس (۲) $QW = PW$). حالا با توجه به (۱) و (۲) و اینکه ضلع **OW** برای دو مثلث **OPW** و **OQW** مشترک است، نتیجه می‌گیریم دو مثلث **OPW** و **OQW** بنا به حالت ض ض ض هم‌نهشتند. پس و در نتیجه **OW** نیمساز زاویه **POQ** است.



مثال: (تمرین کتاب) مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویه این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آن‌ها را O بنامید. از نقطه O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

answer



نکته: محل برخورد نیمسازهای یک مثلث، مرکز دایره محاطی این مثلث است.

استدلال و قضیه تالس

نسبت و تناسب و خواص آن: به کسر $\frac{a}{b}$ (که $b \neq 0$) یک نسبت و به $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ یک تناسب می‌گویند. با خواص تناوب آشنا شوید:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

$$ad=bc \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad=bc$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d} \\ \dfrac{a}{b-a}=\dfrac{c}{d-c} \end{cases}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d} \\ \dfrac{a}{b+a}=\dfrac{c}{d+c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{d}{b}=\dfrac{c}{a} \\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d} \end{cases}$$

مثال: (تمرین کتاب) در تناسب زیر مشخص کنید نسبت $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ برابر با چه عددی است؟

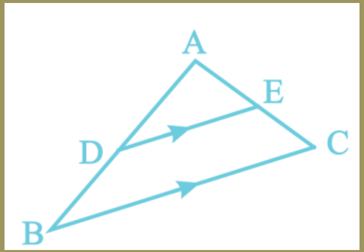
answer

$$\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b}$$

استدلال، قضیه تالس و تعمیم آن

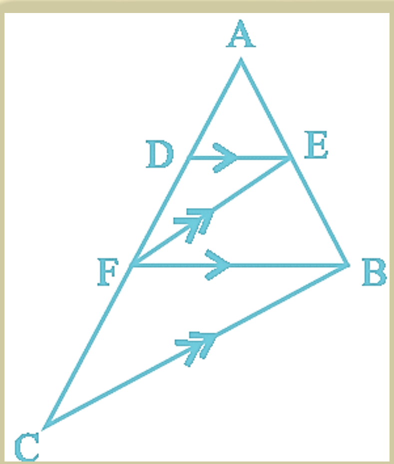
استدلال استقرایی: به نوعی از استدلال که در آن از مشاهده و بررسی موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن موضوع گرفته می‌شود یا به اصطلاح «از جزء به کل می‌رسیم» استدلال استقرایی می‌گوییم.
استدلال استنتاجی: به نوعی از استدلال که در آن بر پایه واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، نتیجه‌گیری منطقی‌ای می‌کنیم، استدلال استنتاجی می‌گوییم. چند مثال از این استدلال:

صورت قضیه تالس



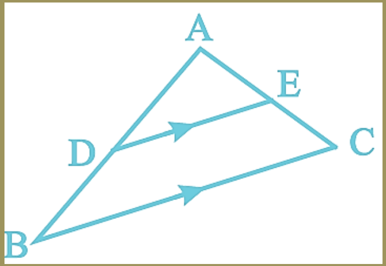
در مثلث ABC ، اگر DE موازی با ضلع BC رسم شود، آنگاه $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ (به عبارت دیگر، نسبت قطعه‌هایی که جدا می‌شوند، برابر است).

مثال: در مثلث ABC ، در شکل زیر DE با FB و EF با BC موازی است با دو بار استفاده از قضیه تالس ثابت کنید: $\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$



answer

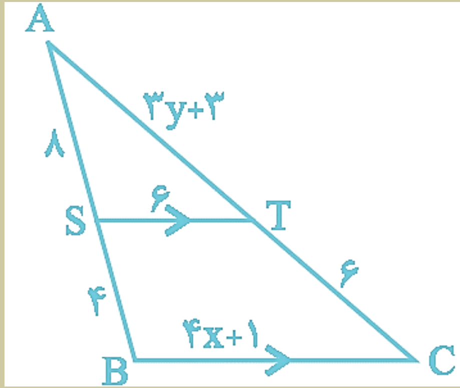
تعمیم قضیه تالس



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

مثال: (تمرین کتاب) در شکل مقابل ، مقادیر **x** و **y** را به‌دست آورید.

answer



عکس قضیه: اگر جای فرض و حکم عوض شود عکس یک قضیه حاصل می‌شود. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا غلط باشد.

مثال :

قضیه: "اگر اسم یک حیوان شیر باشد، آنگاه درنده است."

عکس قضیه: :"اگر یک حیوان درنده باشد، آنگاه اسمش شیر است." نادرست است. مثلاً ممکنه خرس باشه!

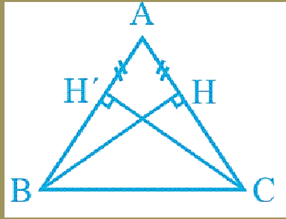
قضیه: " اگر اسم یک حیوان شیر باشد، آنگاه لقبش سلطان جنگل است".

عکس قضیه: " اگر لقب یک حیوان سلطان جنگل باشد، آن حیوان شیر است." درست است. چون فقط لقب شیر، سلطان جنگل است!

چه شیر تو شیری شد! ولی خدایی شیرفهم شدیدا !

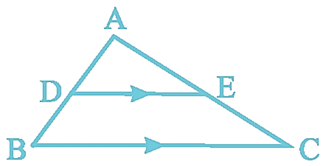
مثال: در هر کدام از قضیه‌های زیر، عکس قضیه را بنویسید. (درستی یا نادرستی عکس قضیه مهم نیست.)

الف) قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش منصف یکدیگر اند.



ب) قضیه: اگر دو ضلع از مثلثی با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های نظیر آن دو ضلع با هم برابرند.

در مثلث روبه‌رو داریم: (فرض: $\mathbf{AB = AC}$ حکم: $\mathbf{CH' = BH}$)



ج) قضیه (تالس): در مثلث روبه‌رو داریم: $DE \parallel BC \rightarrow \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

answer

تعریف گزاره

گزاره یک جمله خبری است که دقیقا درست یا نادرست است، اگرچه درستی یا نادرستی آن بر ما معلوم نباشد.
گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و در واقع ترکیبی از چند گزاره ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند. مثلا گزاره‌های «فردا شنبه است» و «ده عددی فرد است» هر کدام به تنهایی یک گزاره ساده‌اند و «فردا سه‌شنبه است و ده عددی فرد است» یک گزاره مرکب است.

به عنوان مثال جمله‌های زیر همه گزاره‌اند. چون حاوی یک خبرند! (درست یا غلط)

علی به مدرسه آمد.   ۲۳ عددی اول است.

$0 \leq 1000$ عدد اول زوج وجود ندارد.

اما جملات زیر گزاره نیستند، چون خبری را ارائه نمی‌دهند.

چه رنگ زیبایی   آیا قطرهای لوزی بر هم عمودند؟

از روی صندلی پاشو.   آیا ۴۳ عددی اول است؟

یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید.

نقیض یک گزاره

اگر A یک گزاره باشد، نقیض A می‌شود چیزی که A نباشد. ارزش نقیض یک گزاره دقیقا مخالف ارزش خود گزاره است. در نتیجه اگر گزاره درست باشد، نقیض آن غلط و اگر گزاره غلط باشد، نقیض آن درست است.

به عنوان مثال:

الف) گزاره: «۲۳ عددی اول است» نقیض آن: «۲۳ عددی اول نیست»

ب) گزاره: « A از B بزرگ‌تر است» نقیض آن: « A کوچک‌تر مساوی B است»

برهان خلف (برهان مستقیم)

فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و از آن‌جا به یک تناقض با فرض یا به یک نتیجه غیرممکن می‌رسیم. پس نتیجه می‌گیریم فرض خلف (اینکه حکم درست نباشد) غلط بوده و در نتیجه درستی حکم ثابت می‌شود.

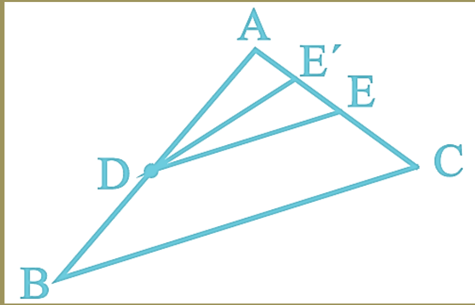
مثال : (مثال کتاب) با برهان خلف ثابت کنید «اگر فرد باشد، **n** نیز فرد است»

answer

عکس قضیه تالس

اگر مانند شکل مقابل در مثلث **ABC** داشته باشیم

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$ آنگاه $$DE \parallel BC$$



اثبات عکس قضیه تالس با برهان خلف

فرض کنید حکم مسئله غلط باشد و .... لذا از نقطه D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا ضلع AC

را در نقطه‌ای مانند E' قطع کند. با توجه به قضیه تالس داریم $\frac{AD}{DB}=\frac{AE'}{E'C}$. با توجه به فرض مسئله نیز که

داشتیم $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$. از دو

نسبت نتیجه می‌گیریم که $\frac{AE'}{E'C}=\frac{AE}{EC}$ با ترکیب این نسبت در مخرج داریم $\frac{AE'}{AC}=\frac{AE}{AC}$. پس $AE=AE'$

پس E بر E' منطبق است و DE' همان DE است و این تناقض است. پس از ابتدا فرض غلط بودن حکم مسئله (فرض خلف) نادرست بوده و حکم نمی‌تواند غلط باشد. یعنی $DE \| BC$.

قضیه‌های دوشرطی

اگر در یک قضیه، هم خود قضیه درست باشد و هم عکس آن، به آن قضیه دوشرطی می‌گویند. قضیه‌های دوشرطی را با نماد .... نشان می‌دهند و با «اگر و تنها اگر» بیان می‌کنند.

مثال کتاب درسی؛ در یک مثلث دو ضلع برابرند اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌رو به آن‌ها با هم برابر باشند، (مثلث متساوی‌الساقین رو میگه!)

مثال نقض:

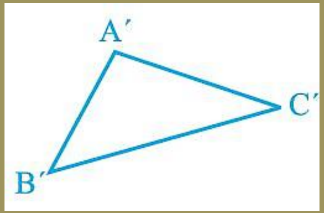
نوعی از استدلال است که در آن با آوردن یک مثال، درستی یک حکم کلی رد می‌شود.

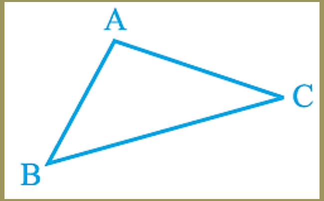
نکته: با مثال نقض نمی‌توان درستی حکم را اثبات کرد و کاربرد آن برای رد درستی یک حکم کلی است!

مثال: (مثال کتاب) فرض کنید فردی ادعا کنه که «هیچ ایرانی‌ای تا به حال مدال فیلدز (نشان بسیار بسیار معتبر در ریاضی که هر ۴ سال یک‌بار به یک نابغه اهدا میشه!) نگرفته است» در این صورت اگه شما حتی یک ایرانی مثال بزنید که این مدل رو گرفته باشه، ادعای این فرد باطل میشه. مرحوم مریم میرزاخانی نه تنها اولین ایرانی بلکه اولین خانومی بودند که این نشان رو در سال ۲۰۱۴ گرفتند! روحشون شاد! ایشون میشن مثال نقض این ادعا!

تشابه مثلث‌ها

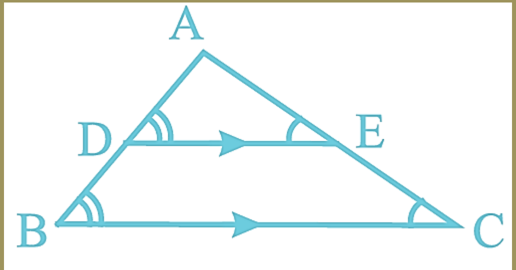
مفهوم تشابه: «دو مثلث زیر متشابه هستند، اگر و تنها اگر زاویه‌های متناظر با هم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث، یکسان باشد.» یعنی:





$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} A = A', B = B', C = C' \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} \end{cases}$$

قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها: اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر را قطع کند، در این صورت مثلث کوچکی که به‌وجود می‌آید، با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.



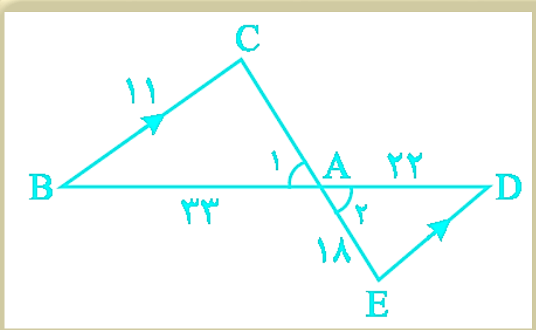
با توجه به قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها، می‌توان سه قضیه بعد را که حالت‌های تشابه دو مثلث را بیان می‌کنند، اثبات کرد.

قضیه ۱: هر گاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

قضیه ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب بوده و زاویه بین آن‌ها با هم برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

قضیه ۳: هر گاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

مثال: در شکل مقابل اندازه پاره‌خط CE برابر ۴۵ سانتی‌متر و $BC \parallel DE$ ، اندازه پاره‌خط‌های DE و AC را به‌دست آورید.

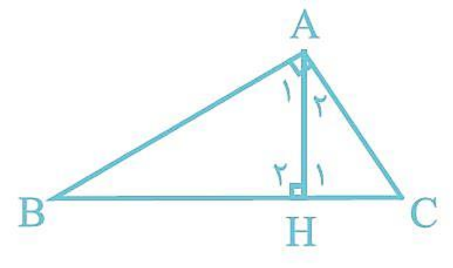


answer

نکته: اگر دو مثلث متشابه باشند، نسبت محیط آن‌ها برابر نسبت تشابه و نسبت مساحت آن‌ها برابر مربع نسبت تشابه آن‌هاست.

نکته: اگر دو مثلث متشابه باشند، نسبت میانه، نیمساز و ارتفاع‌های نظیر آن‌ها برابر نسبت تشابه آن‌هاست.

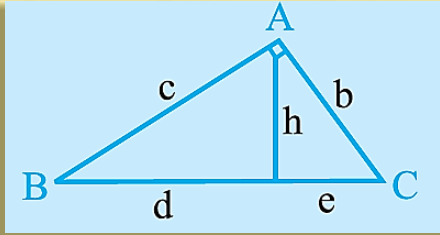
نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه مانند شکل مقابل، ارتفاع وارد بر وتر دو مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آورد که با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.



چهار نکته طلایی که می‌توان از تشابه این سه مثلث نتیجه گرفت: (با توجه به شکل بالا البته!)

$$AB^{۲} = BH \times BC \qquad AC^{۲} = CH \times BC$$

$$AH^{۲} = BH \times CH \qquad AB \times AC = AH \times BC$$



مثال: با توجه به مثلث روبه‌رو در هر قسمت مقادیر خواسته شده را با کمترین مقدار محاسبه وبه‌دست آورید.

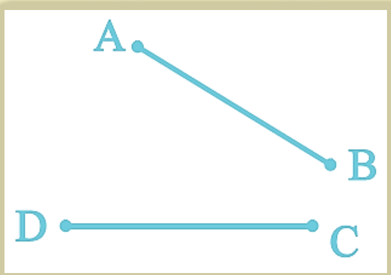
$h = ۵, d = ۷, b = ?, e = ?$

$d = ۵, e = ۳, b = ?, c = ?$

$c = ۸, b = ۶, h = ?$

۱- (تمرین کتاب) الف) دو پاره‌خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطه A و B به یک فاصله و از دو نقطه D و C نیز به یک فاصله باشد.

ب) نقطه مورد نظر در قسمت (الف) را O می‌نامیم. اگر O روی عمودمنصف پاره‌خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رأس‌های چهارضلعی ABCD نسبت به دایره G چه وضعیتی دارند؟



answer

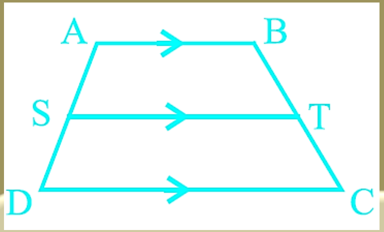
۲- (تمرین کتاب) فرض کنید نقطه A به فاصله ۴ سانتیمتر از خط d باشد. روش رسم هر یک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

الف) مثلثی متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعده آن بر خط d منطبق باشد.

ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتیمتر باشد.

پ) مثلثی که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن $۸cm^۲$ باشد.

answer



۳- (تمرین کتاب) در ذوزنقه مقابل $AB \parallel ST \parallel DC$ است. ثابت کنید که $\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید).

answer

۴- (تمرین کتاب) در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم، عکس آن چه داده شده است، بنویسید.

الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

ب) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، «ضلع متناظر به ارتفاع بزرگتر» کوچکتر است از «ضلع مقابل به ارتفاع کوچکتر» (شکل بکشید و به زبان ریاضی بنویسید.)

answer

۵- (تمرین کتاب) با برهان خلف ثابت کنید نمیتوان از یک نقطه غیرواقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.

answer

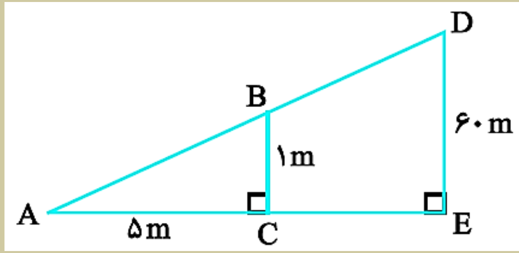
۶- (تمرین کتاب) هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) هیچ عدد اول بزرگتر از ۱۲۷ وجود ندارد.

ب) در هر مثلث اندازه هر ضلع از اندازه هر ارتفاع بزرگتر است.

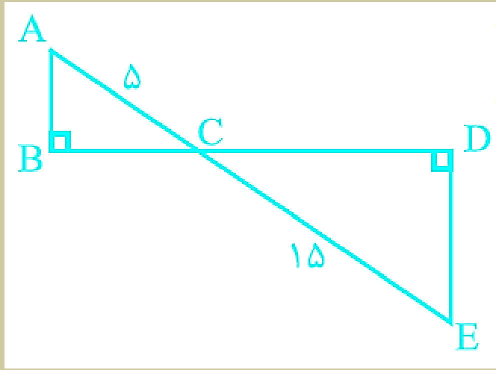
answer

۷- (تمرین کتاب) بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر قرار گرفته است. فردی در نقطه‌ی A قرار دارد و می‌خواهد فاصله خود را تا پایه نورافکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول یک متر روی زمین قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که طول سایه چوب برابر ۵ متر است. فاصله این مرد تا نورافکن چقدر است؟



answer

۸- (تمرین کتاب) در شکل مقابل دو مثلث قائم‌الزاویه مشاهده می‌کنید. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آن‌ها را به دست آورید.



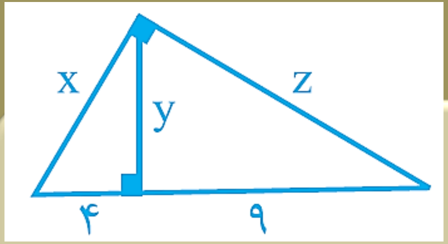
answer

۹- (تمرین کتاب) دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را با نسبت تشابه k در نظر بگیرید، به گونه‌ای که $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=k$ باشد. حال ارتفاع‌های AH و $A'H'$ را در دو مثلث رسم کنید. الف) ثابت کنید مثلث‌های AHB و $A'H'B'$ متشابه‌اند.

ب) نسبت $\frac{AH}{A'H'}$ را به دست آورید. ت) نسبت مساحت‌ها و محیط‌های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را به دست آورید.

answer

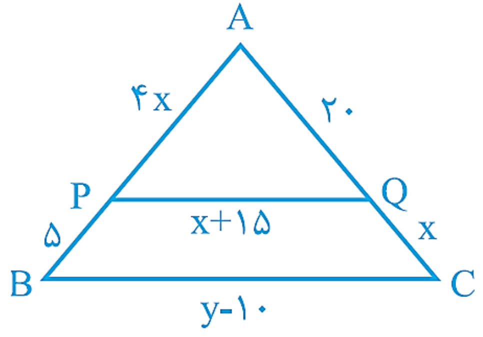
۱۰- (امتحانات سال گذشته) در شکل زیر مقادیر مجهول را محاسبه کنید.



answer

۱۱- (امتحانات سال گذشته) در شکل زیر PQ با BC موازی است، مقادیر x و y را محاسبه کنید.

answer



۱۲- (امتحانات سال گذشته) در شکل زیر $BDC = ACB$ اگر $BE = AC = ۱۲$ و $BD = ۱۰$ و $AB = ۴۰$

مجهولات را بیابید.

answer

فصل ۳ :

تابع

(۶ نمره)

آشنایی با برخی از انواع توابع

توابع گویا: تابعی که ضابطه‌اش به‌صورت $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ باشد به طوری که $Q(x)$ و $P(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $Q(x)\neq ۰$

مثلا توابعی نظیر $y=x^۲$ ، $y=\frac{x-۱}{x}$ ، $y=۲$ ، $y=\sqrt{۵}x$ ، $y=\frac{x^۲-۱}{x^۴+۵x+۲}$ و ... گویا هستند.

دامنه توابع گویا: می‌شود همه اعداد حقیقی، به غیر از آن‌ها که مخرج کسر را صفر می‌کنند.

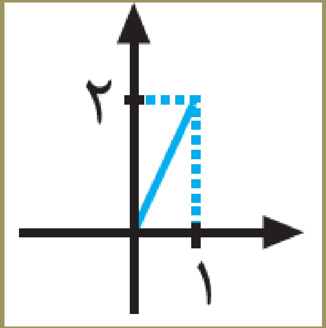
مثال: عبارت زیر را کامل کنید.

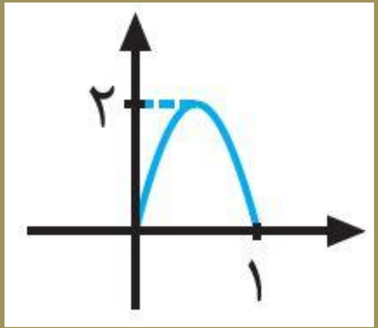
چون مخرج کسر $\frac{۱}{x}$ نمی‌تواند .... باشد، پس .... نمی‌تواند در دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\frac{۱}{x}$

باشد، بنابراین نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ محور .... را قطع نمی‌کند.

شروط تساوی دو تابع :

نکته: هر دو تابع مساوی حتما دارای دامنه و برد مساوی هستند، اما هر دو تابعی که دامنه و برد مساوی داشته باشند صرفا مساوی نیستند. مثلا دو تابع روبه‌رو را ببینید، دامنه هر دو $[0,1]$ و برد هر دو $[0,2]$ است. اما نمودار آن‌ها روی هم منطبق نیست و مساوی نیستند!





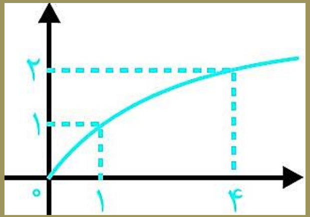
مثال: آیا دو تابع زیر مساویند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^{۲} - x} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x - ۱} \end{cases}$$

answer

توابع رادیکالی

در کتاب درسی فقط توابع رادیکالی با فرجه ۲ زیر ذره‌بین برده شده که دامنه آن‌ها مقادیری از $\mathbf{X}$ است که زیر رادیکال را نامنفی (بزرگ‌تر مساوی صفر) کند. ساده‌ترین تابع رادیکالی $y=\sqrt{x}$ است که دامنه آن مقادیر بازه $[۰,\infty)$ است. نمودار آن که به نمودار اَبرویی معروف است به صورت روبه‌رو است.



روش رسم توابع رادیکالی به فرم $y=\sqrt{ax+b}$ ؛ دامنه‌اش را مشخص کن، سپس یک ابرو در دامنه‌اش رسم کن.

مثال: نمودار $\mathbf{y=-۲\sqrt{-x+۱}+۳}$ را رسم کنید.

تابع پله‌ای

به تابعی که دامنه آن را بتوان به صورت تعدادی بازه جدا از هم نوشت و به هر یک از این بازه‌ها تنها یک عدد در برد نسبت داد، تابع پله‌ای می‌گویند. (به عبارت دیگر در هر بازه از دامنه آن‌ها، یک تابع ثابت وجود دارد.)

مثلا $y=\begin{cases} -۱ & -۲<x<-۱ \\ ۲ & ۰\le x<۴ \\ ۱ & ۴\le x<۶ \end{cases}$ یک تابع پله‌ای است.

مشهورترین تابع پله‌ای تابع جزء صحیح است. تعریفش را ببینید:

تابع جز صحیح (تابع براکت): جزء صحیح هر عدد می‌شود اولین عدد صحیح کوچک‌تر از خودش. این تابع به صورت $f(x)=[x]$ نشان داده می‌شود. به طور مثال :

$[-۴/۳]=-۵$ $[۵/۹]=۵$ $[۳/۱]=۳$ $[-۴/۹]=-۵$

نکته: جزء صحیح یک عدد صحیح می‌شود خودش.

مثال: اگر $f(x)=[x+۳]$ باشد، در این صورت حاصل $f(۲-\sqrt{۲})$ برابر .... است.

مثال: (تمرین کتاب) تابع $f(x)=[x]+۲$ را رسم کنید.

answer

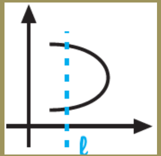
وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک

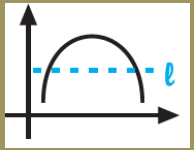
تعریف یک‌به‌یک بودن **f** از روی زوج مرتب؛ تابع **f** زمانی یک به یک است که هیچ دو زوج مرتبی بردهای (**y**های) برابر نداشته باشند. اگر برد آن‌ها برابر باشد، باید دامنه آن‌ها نیز برابر باشد!

مثلا $f=\{(۱,۲)(۴,۲)\}$ تابع است (چون دامنه آن‌ها متفاوت است) اما یک‌به‌یک نیست. مثلا $f=\{(۱,۲)(۱,۳)\}$ اصلا تابع نیست که بخواهد یک‌به‌یک باشد یا خیر! دقت کنیم که یک‌به‌یک بودن از ویژگی‌های یک تابع است.

اما در مثال $h=\{(۱,۲)(۳,۴)\}$ ، **h** تابع است. یک تابع یک به یک. مثلِ یک مرد!!

تشخیص یک به یک از روی نمودار

هر خط موازی محور Xها، باید نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. مثلا 

تابع نیست که بخواهد یک به یک باشد. (خط l نمودار بزرگوار را در دو نقطه قطع کرده!) مثلا 

تابع است اما چون خط l موازی محور Xها) نمودارش را در ۲ نقطه قطع کرده دیگر یک به یک نیست، اما  مربوط به تابعی یک به یک است.

وارون تابع f

اگر وارون f (معکوس f)، خود تابع یک باشد، f را وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) می‌نامیم و معکوس f را با f^{-1} نشان می‌دهیم.

حال سوال اینجاست که چه زمانی f معکوس‌پذیر است؟

شرط وارون‌پذیری f : تابع f وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر یک به یک باشد.

معکوس کردن f از روی زوج مرتب: کافی است جای مولفه‌های طول و عرض زوج مرتب‌ها را عوض کنید.

به‌دست آوردن نمودار f^{-1} : گفتیم اگر f یک به یک باشد، معکوس‌پذیر است و نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه‌اند.

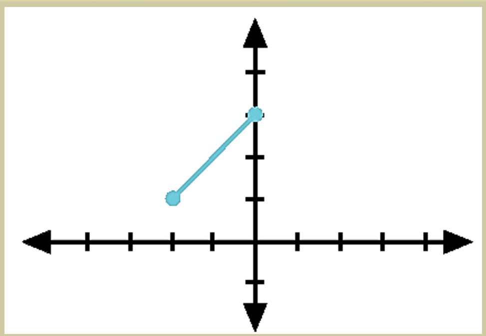
نتیجه: $\boxed{R_f = D_{f^{-1}}}$ و $\boxed{D_f = R_{f^{-1}}}$

مثال: تابع وارون هر یک از توابع زیر را بیابید.

answer

$$\{(۲,۳)(-۲,۱)(-۱,۲)\}$$

answer



بدست آوردن ضابطه‌ی وارون تابع f

ابتدا به جای $f(x)$ ، نماد **y** قرار می‌دهیم. سپس سعی می‌کنیم (در صورت امکان) **x** را برحسب **y** بنویسیم.

(**x** را تنها می‌کنیم!) در آخر به جای **x** ، $f^{-1}(x)$ یا y^{-1} و به جای **x** ، **y** قرار می‌دهیم.

مثلا می‌خواهیم وارون تابع $f(x)=۲x+\frac{۱}{۳}$ را به‌دست بیاوریم! چون نمودار این تابع خطی، صعودی است، پس هر خط موازی محور **x**ها، نمودارش را در یک نقطه قطع می‌کند و در نتیجه **f** یک به یک است. پس وارون‌پذیر نیز هست. بقیه راه حل را ببینید!

مثال: نشان دهید که وارون تابع داده شده، یک تابع درجه دوم است. $f(x)=۳-\sqrt{x}$

answer

اعمال جبری روی توابع، رسم نمودار توابع

۱- جمع $((f+g)(x))$: یعنی ضابطه دو تابع را با هم جمع کنیم، $\leftarrow f(x)+g(x)$ ؛ دامنه این تابع می‌شود . $D_f \cap D_g$

۲- تفریق $((f-g)(x))$: یعنی ضابطه دو تابع را از هم کم کنیم، $\leftarrow f(x)-g(x)$ ؛ دامنه این تابع می‌شود $D_f \cap D_g$

۳- ضرب $((f.g)(x))$: یعنی ضابطه دو تابع را در هم ضرب کنیم، $\leftarrow f(x)\times g(x)$ ، دامنه این تابع می‌شود $D_f \cap D_g$

۴- تقسیم $((\frac{f}{g})(x))$: یعنی ضابطه دو تابع را بر هم تقسیم کنیم، $\leftarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ ، دامنه این تابع می‌شود .

$$D_f \cap D_g - \{x | g(x)=0\}$$

مثال: دو تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$ را در نظر بگیرید. دامنه و ضابطه توابع $f\pm g$ ، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید!

answer

مثال: توابع $f(x)=۳-x^۲$ و $g(x)=-۲$ داده شده‌اند.

الف) نمودار تابع $g+f$ را رسم کنید. (راه حل نوشته شود.) ب) مقدار $(f.g)(۰)$ را محاسبه کنید.

answer

رسم نمودار تابع (یادآوری و تکمیل)

۱: اگر نمودار $f(x)$ را داشتیم و خواستیم نمودار $f(x+a)$ را بیابیم، نمودار **f** را به اندازه **a** و در خلاف جهت علامتش روی محور **x**ها حرکت می‌دهیم.

۲: اگر $f(x)$ را داشتیم و خواستیم نمودار $f(x)+k$ را بیابیم، نمودار **f** را به اندازه **k** و در جهت علامتش روی محور **y**ها حرکت می‌دهیم.

۳: اگر $f(x)$ را داشتیم و خواستیم نمودار $f(ax)$ را رسم کنیم، نمودار **f** را با ضریب $\frac{1}{a}$ در جهت محور **x**ها منبسط یا منقبض می‌کنیم.

توجه: اگر $a < ۰$ تاثیر علاممت منفی آن این است که اول نمودار $f(x)$ را نسبت به محور **y**ها قرینه می‌کند، بعد آن را منبسط یا منقبض می‌کند.

۴: اگر $f(x)$ را داشتیم و خواستیم نمودار $kf(x)$ را رسم کنیم، نمودار **f** را با ضریب **k**در جهت محور **y**ها منقبض یا منبسط می‌کنیم.

توجه: اگر $k < ۰$ تاثیر علامت منفی آن این است که اول نمودار $f(x)$ را نسبت به محور **x**ها قرینه می‌کند، بعد آن را منبسط یا منقبض می‌کند.

مثال: نمودار تابع $\mathbf{y = -۲(x-۱)^{۲} + ۱}$ را رسم کنید.

answer

۱- (کتاب درسی) نمودار تابع با ضابطه $\mathbf{g(x)=-۳+\sqrt{x-۴}}$ را رسم کنید.

answer

۲- (کتاب درسی) حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

answer

الف) $[۳۰۰/۴۰۰۲]$

ب) $[-۱۰۳/۰۰۳]$

پ) $[-۲۳۰۹/۵۴]$

۳- (تمرین کتاب) تابع پله‌ای روبه‌رو را رسم کنید.

answer

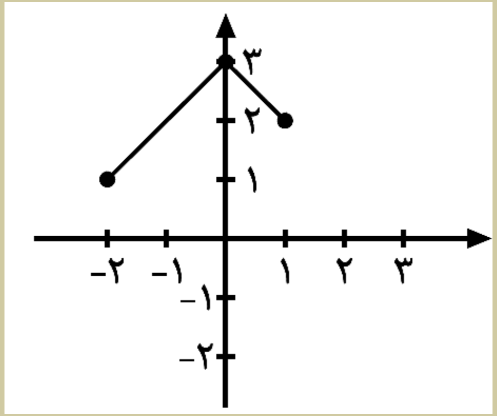
$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} ۳ & \mathbf{x} \in [۰,۱) \\ ۰ & \mathbf{x} \in [۱,۵] \\ ۱ & \mathbf{x} \in (۶,۷] \end{cases}$$

۴- (تمرین کتاب) وارون تابع $f=\{(۲,۳)(-۲,۱)(-۱,۲)\}$ را به دست آورید.

answer

۵- (تمرین کتاب) نمودار وارون تابع داده شده در شکل زیر را رسم کنید.

answer



۶- (تمرین کتاب) وارون تابع $f(x)=\frac{-۷x+۳}{۵}$ را به دست آورید.

answer

۷- (تمرین کتاب) در هر مورد، دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بنویسید.

answer

الف) $f(x)=\frac{x-۲}{x+۵}$ $\quad g(x)=x^{۲}+۳x-۱۰$

ب) $f=\{(۲,۵)(۳,۴)(۰,-۲)\}$ $g=\{(-۱,۲)(۰,۳)(۲,۴)(۳,۰)\}$

answer

۸- (تمرین کتاب) با استفاده از نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x}$ ، نمودار تابع $g(x)=۱-\sqrt{x-۳}$ را رسم کنید.

answer

۹- (امتحانات سال گذشته) نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^{۲}-۲$ را رسم کنید.

answer

۱۰- (امتحانات سال گذشته) مجموعه جواب معادله $[۲x - ۱] = ۳$ را بیابید.

answer

۱۱- (امتحانات سال گذشته) اگر $f(x) = \sqrt{x+۳}$ و $g(x) = \frac{۳}{x-۲}$ دو تابع باشند،

الف) مقدار $۳(f-g)(۱)$ را به دست آورید. ب) دامنه تابع $(f \times g)(x)$ را به دست آورید.

answer

۱۲- (امتحانات سال گذشته) تابع $y=f(x)$ با دامنه $[-۲,۱]$ و برد $[-۳,۴]$ را در نظر بگیرید؛ دامنه تابع

$g(x)=-۳f(۲x)+۱$ برابر .... و برد آن برابر .... است.

answer

۱۳- (امتحانات سال گذشته) تابع $f=\{(m^{۴}+۲,۵)(n^{۳}+۱,۴)\}$ مفروض است. M و n را طوری تعیین کنید

که برد وارون f، $\{-۷,۱۸\}$ باشد.

answer

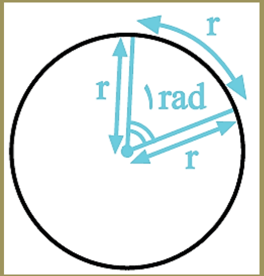
۱۴- (امتحانات سال گذشته) اگر تابع خطی **f** از نقاط **(۲,۱)** و **(۴,۵)** عبور کند، ضابطه وارون آن را به دست آورید.

answer

فصل ۴ :

مثلثات

تعریف رادیان



یک رادیان برابر است با اندازه زاویه مرکزی در یک دایره به شعاع **r** که طول کمان روبه‌رو به این زاویه هم **r** باشد.

رابطه بین رادیان و درجه: این را یک اصل بگیرید که **π** رادیان ۱۸۰ درجه است. حالا یک نسبت بسازید.

$$\frac{R}{D}=\frac{\pi}{۱۸۰}$$

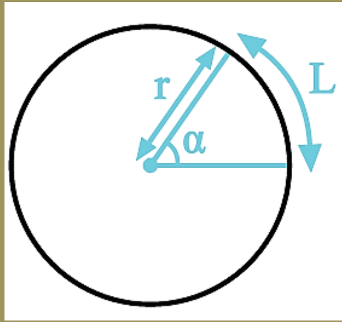
مثال: یک رادیان حدود چند درجه است؟

answer

مثال: زاویه ۱۰۵- درجه را به رادیان تبدیل نموده و روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

answer

رابطه بین زاویه مرکزی (بر حسب رادیان) و طول کمان روبه‌رویش



رابطه بین زاویه مرکزی (بر حسب رادیان) و طول کمان روبه‌رویش

یک نسبت به صورت زیر می‌سازیم:

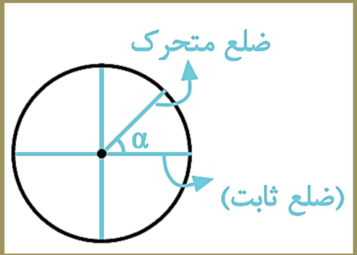
نکته: در رابطه $L = r\alpha$ ، دقت شود α بر حسب رادیان است.

مثال: شخصی در پیست دوچرخه‌سواری به شکل دایره و به شعاع ۳۵۰۰ متر مسافت $\frac{۷\pi}{۲}$ کیلومتر را طی می‌کند.

مقدار زاویه‌ای که چرخیده است برحسب درجه تعیین کنید.

answer

دایره مثلثاتی

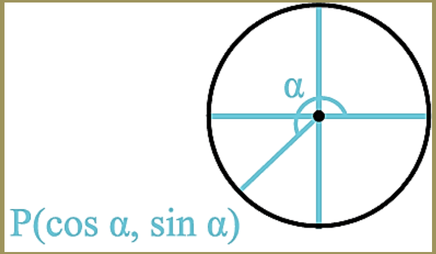


وظیفه تولید زاویه بر عهده دایره مثلثاتی است. این دایره شعاعش ۱ واحد است. در این دایره یک ضلع ثابت وجود دارد، یک ضلع متحرک! ضلع متحرک با حرکت خود و انحرافی که ایجاد می‌سازد، زاویه تولید می‌کند.

حرکت ضلع متحرک در جهت عقربه‌های ساعت حرکتی منفی است و زوایای منفی تولید می‌کند.

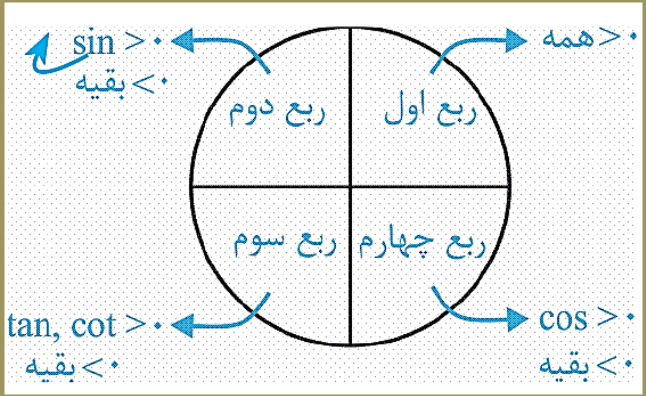
حرکت ضلع متحرک در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکتی مثبت است و زوایای مثبت تولید می‌کند.

نقطه انتهایی ضلع متحرک دارای یک مولفه طولی و یک مولفه عرضی است.



پس در دایره مثلثاتی، محور طول‌ها را محور Cos ها و محور عرض‌ها را محور Sin ها می‌نامیم!

علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع‌های دایره:

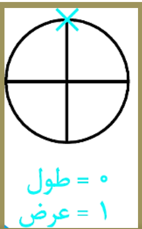


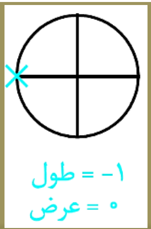
یه رمز هست به نام «هستک» که نشون می‌ده تو ناحیه‌ها به ترتیب کی مثبته و چی به چیه! (همه ـ سینوس ـ تانژانت و کتانژانت ـ کسینوس) خوبه بلدش باشیم!

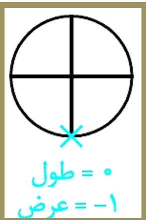
مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص

قبل از حفظ جدول زیر، به این نکته توجه کنید که برای به‌دست آوردن مقادیر مثلثاتی ابتدای ربع‌ها ($۰°,۹۰°,۱۸۰°,۲۷۰°,۳۶۰°$) فقط کافی است یک دایره بکشید و آن نقطه را مشخص کنید. طول آن نقطه Cos زاویه و عرضش Sin زاویه خواهد بود.برای تانژانت کوتانژانت هم امتداد بره! یکیش صفره یکیش تعریف نشده!

نسبت	کمان							
	۰°	۳۰° $(\frac{\pi}{۶})$	۴۵° $(\frac{\pi}{۴})$	۶۰° $(\frac{\pi}{۳})$	۹۰° $(\frac{\pi}{۲})$	۱۸۰° (π)	۲۷۰° $(\frac{۳\pi}{۲})$	۳۶۰° (۲π)
Sin	۰		$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	−۱	۰
Cos	۱	$\frac{۱}{۲}$ $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	−۱	۰	۱
tan	$\frac{۰}{۱} = ۰$	$\frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	$\frac{۱}{۰} = \cdot\ R$	$\frac{۰}{-۱} = ۰$	$\frac{-۱}{۰} = \cdot\ R$	۰
cot	$\frac{۱}{۰} = \cdot\ R$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\frac{۰}{۱} = ۰$	$\frac{-۱}{۰} = \cdot\ R$	$\frac{۰}{-۱} = ۰$	$\frac{۱}{۰} = \cdot\ R$







روش محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زوایای غیرآشنا! (به فرم $\left(\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha\right)$)

گام اول: ابتدا باید مشخص کنید که هر کدام از این زوایای از ابتدای کدام ربع و به چه اندازه منحرف شده‌اند.

(مثلا ۱۳۵° را می‌توان به صورت ($۹۰^\circ+۴۵^\circ$) یا ($۱۸۰^\circ-۴۵^\circ$) نوشت.)

گام دوم: (تشخیص علامت) مشخص کنید زاویه مربوطه در کدام ربع است و علامت نسبت داده شده را در آن ربع بیابید.

گام سوم: (تشخیص نسبت) اگر ابتدای ربع داده شده مضرب فرد ۹۰° بود، (یعنی $\pm۹۰^\circ$ یا $\pm۳\times۹۰^\circ=\pm۲۷۰^\circ$ یا $\pm۵\times۹۰^\circ=\pm۴۵۰^\circ$ که جایگاهشون بالا و پایین دایره هست) در این صورت Sin و Cos به هم و tan و cot به هم تبدیل می‌شوند. در غیر این صورت تغییری در نسبت داده شده رخ نمی‌دهد.

$۱) \quad \mathrm{Sin}(۲۱۰^{\circ}) =$

$۲) \quad \cot(۱۳۵^{\circ}) =$

$۳) \quad \cot(\pi + ۲۰\alpha) =$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

فقط Cos منفی رو می‌خوره، بقیه می‌ندازن بیرون منفیه بربختو!

$۱)\ \mathrm{Cos}(-\alpha) = \mathrm{Cos}\,\alpha$

$۲)\ \mathrm{Sin}(-\alpha) = -\mathrm{Sin}\,\alpha$

$۳)\ \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$۴)\ \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{\mathrm{Cos}(-۹۰^\circ)+\mathrm{Sin}(-۲۷۰^\circ)}{\mathrm{Sin}(-۱۸۰^\circ)-\mathrm{Cos}(-۳۶۰^\circ)}$$

answer

زاویه‌های متمم

اگر $\alpha+\beta=۹۰^\circ$ ، آنگاه α و β را متمم هم می‌نامیم. برای ۲ زاویه متمم، Sin یک زاویه با Cos زاویه دیگر و tan یکی با cot دیگری برابر است.

$\boxed{\operatorname{Sin}\alpha=\operatorname{Cos}\beta}$ $\boxed{\operatorname{Cos}\alpha=\operatorname{Sin}\beta}$

زوایای مکمل

اگر $\alpha+\beta=۱۸۰^\circ$ ، آنگاه α و β را مکمل هم می‌نامیم! اگر دو زاویه مکمل باشند، Sin های آن‌ها برابر، اما tan ها، cot ها و Cos های آن‌ها قرینه است.

$$\begin{cases}\sin\alpha=\sin(۱۸۰-\beta)=\sin\beta\\ \tan\alpha=\tan(۱۸۰-\beta)=-\tan\beta\\ \cot\alpha=\cot(۱۸۰-\beta)=-\cot\beta\\ \cos\alpha=\cos(۱۸۰-\beta)=-\cos\beta\end{cases}$$

فرمولای مقدماتی مثلثات

۱ $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$

۲ $\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha$ → ۴ $\cos\alpha=\pm\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}$

α در نواحی ۱ و ٤ (+)

α در نواحی ۲ و۳ (−)

۳ $\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha$ → ۵ $\sin\alpha=\pm\sqrt{۱-\cos^۲\alpha}$

α در نواحی ۱ و ۲ (+)

α در نواحی ۳ و٤ (−)

۶ $\tan\alpha=\dfrac{۱}{\cot\alpha}$

۷ $\tan\alpha.\cot\alpha=۱$

فرمولای نقره‌ای

۱ $\div\sin^۲\alpha$ → $\dfrac{\sin^۲\alpha}{\sin^۲\alpha}+\dfrac{\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha}=\dfrac{۱}{\sin^۲\alpha}$ → ۸ $۱+\cot^۲\alpha=\dfrac{۱}{\sin^۲\alpha}$

۱ $\div\cos^۲\alpha$ → $\dfrac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}+\dfrac{\cos^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}=\dfrac{۱}{\cos^۲\alpha}$ → ۹ $۱+\tan^۲\alpha=\dfrac{۱}{\cos^۲\alpha}$

مثال: اگر $\cos x = \frac{-۴}{۵}$ و $\sin x > ۰$ سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه x را بیابید.

answer

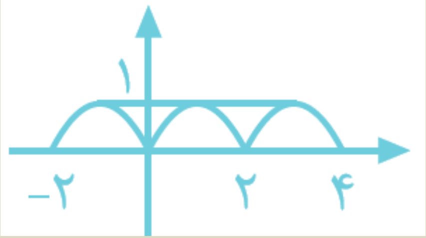
مثال: اگر $\cot\alpha = -۲$ و $\cos\alpha > ۰$ سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

answer

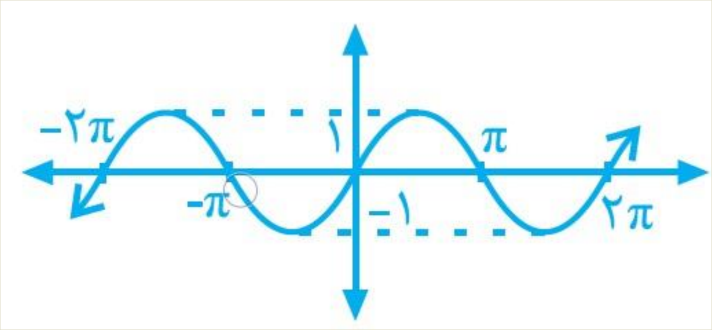
توابع مثلثاتی

تابع متناوب (تعبیر نموداری): از نظر نموداری تابع متناوب تابعی است که نمودار آن در یک طول ثابت، متناوباً تکرار شود

دوره تناوب: به طولی که نمودار یک تابع متناوب در آن تکرار می‌شود، دوره تناوب آن تابع می‌گویند و با **T** نشانش می‌دهند. دوره تناوب چون یک کمیت از جنس طول است، همواره مقدارش مثبت است. ($T > ۰$)



$$T = ۲$$



تابع سینوس؛ نمودار تابع $y = \mathrm{Sin}\, x$ به فرم روبه‌روست.

از روی این نمودار، چند ویژگی مهم تابع $y = \mathrm{Sin}\, x$ مشخص می‌شود.

۱- تابع $y = \mathrm{Sin}\, x$ متناوب است و دوره تناوبش $T = ۲\pi$ است. $\longleftarrow$ دوره تناوب

$y = \sin ax$ می‌شود . $T = \frac{۲\pi}{|a|}$

۲- دامنه این تابع $\mathbb{R}$ است. به طور کلی تابع سینوسی، محدودیت و شرطی برای مقادیر **x** ایجاد نمی‌کند.

۳- برد این تابع برابر بازه $[-۱,۱]$ است. یعنی $-۱ \leq \mathrm{Sin}\, ax \leq ۱$ پس در یک دوره تناوب، حداقل

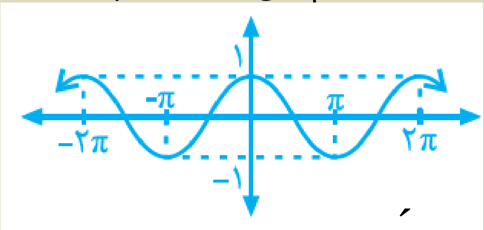
مقدار **(min)** آن ۱- و حداکثر مقدار **(max)** آن ۱ می‌شود.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید؟

$y = ۲\,\mathrm{Sin}\,x$ $\qquad$ $y = |\mathrm{Sin}\,x|$ $\qquad$ $y = -\mathrm{Sin}\,x + ۱$

answer

تابع کسینوس : نمودار تابع $y = \cos x$ به فرم روبه‌رو است. از روی این نمودار هم می‌توان به چند ویژگی



کلیدی تابع $y = \cos x$ پی برد:

۱- تابع $y = \cos x$ متناوب است و دوره تناوبش $T = ۲\pi$ است ⟵ دوره تناوب

$y = \cos ax$ می‌شود . $T = \frac{۲\pi}{|a|}$

۲- دامنه آن است. به طور کلی تابع کسینوسی هم مانند تابع سینوسی، شرط و محدودیتی روی مقادیر **X** اعمال نمی‌کند!

۳- برد تابع $y = \cos x$ بازه $[-۱,۱]$ است. $-۱ \le \cos ax \le ۱$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید؟

$$y = \left|\frac{\pi}{۲} + ۲\,\mathrm{Cos}(-x)\right| \qquad\qquad y = \mathrm{Cos}\left(x + \frac{\pi}{۲}\right)$$

answer

۱- (تمرین کتاب) زاویه D برابر با $\frac{\pi}{20}$ رادیان است. اندازه این زاویه چند درجه است؟

۲- (تمرین کتاب) دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتیمتر از این دایره چند رادیان است؟

۳- (تمرین کتاب) حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\text{Cos}(-۷۲۰^\circ)+\cot(-۶۰۰^\circ)+\tan ۷۲۰^\circ-\tan(-۶۰۰^\circ)$

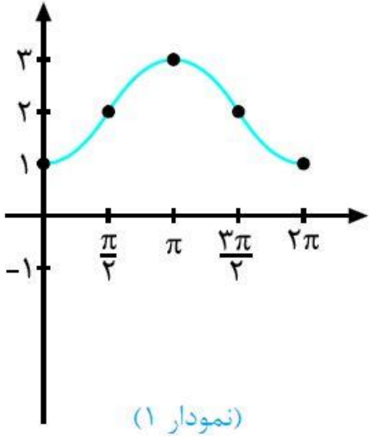
ب) $\text{Cos}(-۲۱۰^\circ)+\cot(۲۴۰^\circ)$

پ) $\text{Sin}\, ۶۳۰^\circ+\tan(-۵۴۰^\circ)$

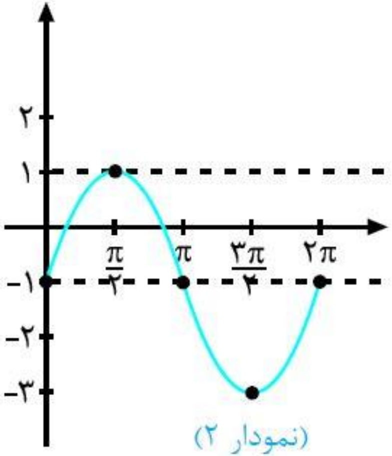
ث) $\text{Sin}(\frac{۲۵\pi}{۳})-\text{Cos}(\frac{۲۳\pi}{۴})$

ج) $\dfrac{\text{Sin}\frac{۳\pi}{۴}-\text{Cos}\frac{۵\pi}{۶}}{\text{Sin}(\frac{-۳\pi}{۴})+\tan(\frac{-۴\pi}{۳})}$

۵- (تمرین کتاب) با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هر یک از دو نمودار زیر، کدام یک از ضابطه‌های داده شده را دارند؟ نمودار تابع با سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.



(نمودار ۱)



(نمودار ۲)

الف) $y = ۲\,\mathrm{Cos}\,x + ۱$

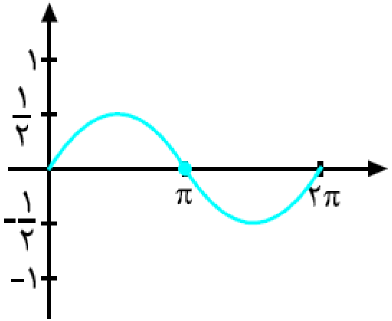
ب) $y = ۲\,\mathrm{Sin}\,x - ۱$

پ) $y = ۲ - \mathrm{Cos}\,x$

ت) $y = \mathrm{Sin}\,x - ۲$

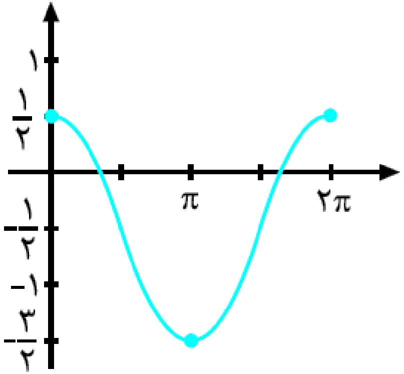
۶- (تمرین کتاب) با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟

الف) شکل روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{۱}{۲}\text{Sin}\,x$ را نشان می‌دهد.



answer

ب) شکل روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $y = \cos x - \frac{۱}{۲}$ را نشان می‌دهد.



answer

پ) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = ۱ + \text{Sin}\, x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازه یک واحد به موازات محور **X**ها انتقال دهیم.

answer

ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -\mathrm{Cos}\, x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور **X**ها قرینه کنیم.

answer

۷- (امتحانات سال گذشته) در دایره‌ای به محیط 16π طول کمان مقابل به زاویه 150° چقدر است؟

answer

۹- (امتحانات سال گذشته) مقدار $y = ۴\mathbf{Cos}(۲x + \frac{\pi}{۲})$ را به ازای $x = \frac{\pi}{۶}$ به دست آورید.

answer

۱۱- (امتحانات سال گذشته) اگر $\sin\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، مقدار $\tan\alpha$ را به دست آورید.

answer

۱۲- (امتحانات سال گذشته) اگر $\frac{۱}{۲} = \frac{\mathbf{Sin}(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)}{۲\,\mathbf{Sin}(\alpha+۹\pi)+\mathbf{Cos}(\alpha-\frac{۵\pi}{۲})}$ ، مقدار $\tan\alpha$ را به دست آورید.

answer

توابع نمایی و لگاریتمی

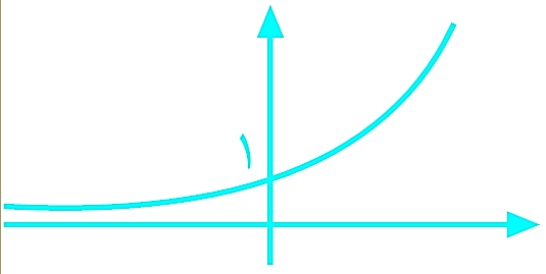
توابع نمایی

تعریف تابع نمایی: هر تابع با ضابطه $y = a^x$ که $a \in \mathbb{R}$ و $a > ۰$ و $a \neq ۱$ یک تابع نمایی نامیده می‌شود،

مانند: $y = (\frac{۱}{۲})^x$ ، $y = (\sqrt{۲})^x$ و ...

حالت اول : $a > ۱$ اگر پایه بزرگ‌تر از یک باشد، با افزایش a مقدار تابع، یعنی $y = a^x$ افزایش می‌یابد،

و نمودار حالت صعودی اکید خواهد داشت.



برخی ویژگی‌های این تابع با توجه به نمودارش

۱- این تابع یک به یک و در نتیجه معکوس‌پذیر است. (چون هر خط موازی محور **x**ها نمودارش را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.)

۲- عرض از مبدأ (یعنی محل عبور نمودار از محور **y**ها) این نمودار یک است. (شما به **x** بده صفر) $y = a^{۰} = ۱ \Leftarrow$

۳- این نمودار همیشه بالای محور **x**هاست و به ازای $x \in \mathbb{R}$ ، $a^{x} > ۰$

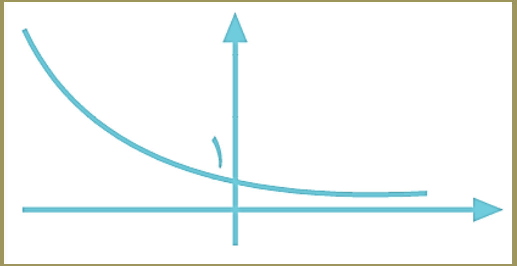
۴- همان‌گونه که می‌بینید، این تابع هیچ محدودیتی برای مقادیر ورودی اعمال نمی‌کند و دامنه‌اش $\mathbb{R}$ است. اما خروجی آن همان‌طور که گفتیم فقط مقادیر مثبت را تولید می‌کند. پس برد این تابع $(۰, +\infty)$ است.

مثال: نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت آن‌ها را نسبت به هم مقایسه کنید.

$$y = ۲^x ,\ y = ۳^x ,\ y = ۵^x$$

answer

حالت دوم ؛ در این حالت پایه بین صفر و یک است و در نتیجه با افزایش مقادیر **x**، مقدار **y** کاهش می‌یابد و نمودارش اکیدا نزولی است.



برخی از ویژگی‌های این تابع با توجه به نمودارش

۱- این تابع یک به یک و در نتیجه معکوس‌پذیر است.

۲- این نمودار در عرض $y=1$ از محور **y**ها گذر می‌کند و در نتیجه عرض از مبدأ آن $y=1$ است.

۳- این نمودار همواره بالای محور **x**ها جا خوش کرده و در نتیجه به ازای $x \in \mathbb{R}$ ، $a^x > 0$.

۴- این تابع هم هیچ محدودیت و گیری برای مقادیر ورودی اعمال نمی‌کند و دامنه‌اش می‌شود $D_y = \mathbb{R}$.

اما با توجه به نمودار در می‌یابیم که برد این تابع $R_y = (0, +\infty)$ است.

مثال: نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت آن‌ها را نسبت به هم مقایسه کنید.

$$y=(\frac{۱}{۲})^x , y=(\frac{۱}{۳})^x , y=(\frac{۱}{۴})^x$$

answer

معادلات نمایی

اگر b یک عدد مثبت باشد و $b^x = b^y$ ، آنگاه $x = y$ و برعکس.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

$$۴^{۲x-۱} = ۸^{x+۱}$$

$$۵^{۳x-۱} = ۱۲۵^{۲x+۱}$$

نامعادلات نمایی

نامعادلاتی‌اند به فرم $b^x \geq b^y$ که ۲ حالت کلی دارند:

حالت اول: اگر $b > ۱$ آنگاه $x \geq y$ و بالعکس. (جهت عوض نمی‌شود!)

حالت دوم: اگر $۰ < b < ۱$ آنگاه $x \leq y$ و بالعکس. (جهت عوض می‌شود!)

مثلا اگر $۵^x \leq ۵^۴$ آنگاه $x \leq ۴$ و اگر $(\frac{۱}{۵})^x \leq (\frac{۱}{۵})^۴$ آنگاه $x \geq ۴$.

مثال: مجموعه جواب نامعادلات زیر را به‌دست آورید!

$$۲^{x-۳} \leq \frac{۱}{(۳۲)^{۳}}$$

$$\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲n+۵} < \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۷}$$

تعریف تابع لگاریتمی

$\bigcirc = \log_a^{\Delta} \Leftrightarrow a^{\bigcirc} = \Delta$ رمز: هر توانی یک لگاریتم دارد، که باید $a > ۰$ و $a \neq ۱$ و $\Delta > ۰$.

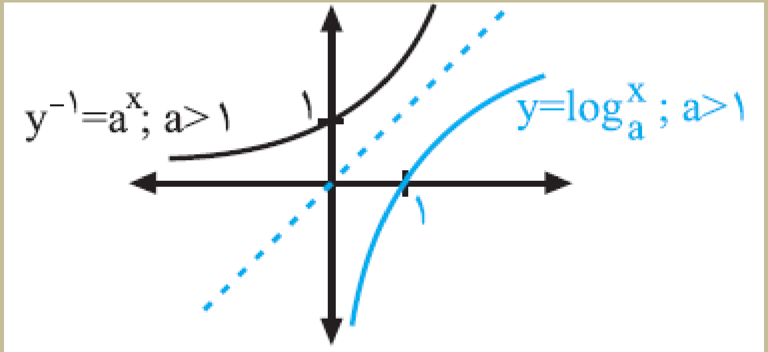
یعنی مثلا اگر $۲^{۳} = ۸$ آنگاه $۳ = \log_{۲}^{۸}$.

نکته: ارتباط بین یک تابع لگاریتمی و یک تابع نمایی: توابع لگاریتمی و نمایی معکوس یکدیگرند. یعنی اگر $f(x) = a^{x}$ آنگاه $f^{-۱}(x) = \log_a^{x}$ و اگر $f(x) = \log_a^{x}$ آنگاه $f^{-۱}(x) = a^{x}$.

نمودار تابع لگاریتمی با ضابطه $f(x)=\log_a^x$

با توجه به اینکه تابع لگاریتمی، معکوس تابع نمایی است، پس نمودار آن، قرینه نمودار تابع نمایی نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم $(x=y)$ است و ۲ حالت کلی دارد:

حالت اول : اگر مبنای لگاریتم بیش از یک باشد، نمودارش این‌گونه می‌شود:



برخی از ویژگی‌های این تابع با توجه به نمودارش

۱- این تابع هم تابعی یک به یک است و معکوس آن تابعی نمایی است.

۲- تابع لگاریتمی به فرم $y=\log_a^x$ که $a>1$ هیچ‌گاه نمی‌تواند محور **y**ها را قطع کند، (چون $x>0$

و در نتیجه **x** نمی‌تواند صفر شود.) بلکه نمودارش فقط به محور **y**ها، آرام آرام میل می‌کند (بعدا می‌خوانیم زمانی

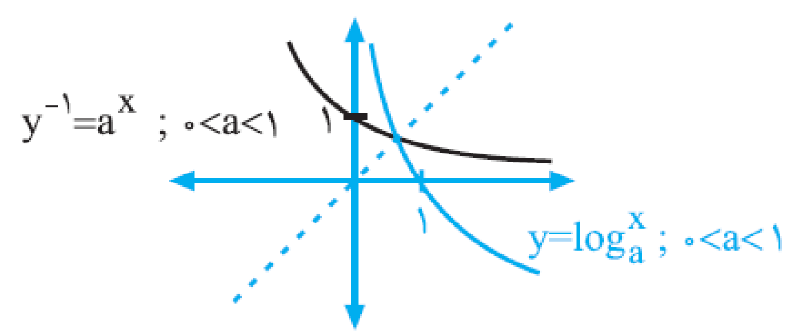
که **x** به 0^+ میل کند، **y** به .... میل می‌کند) و از آن عبور نمی‌کند.

۳- این نمودار برخلاف نمودار تابع نمایی، محور **x**ها را قطع می‌کند و طول از مبدأ آن $x=1$ است.

۴- نمودار این تابع هم صعودی اکید است. (یعنی هر چه $\mathbf{x}$ زیاد شود، $\log_a^x$ $(a>۱)$ هم زیاد می‌شود.)

۵- با نگاهی به نمودار $y=\log_a^x$ $(a>۱)$ به حدود دامنه و برد آن پی می‌بریم. پس $D_y=(۰,+\infty)$ و $R_y=\mathbb{R}$.

حالت دوم $۰<a<۱$: اگر مبنای لگاریتم بین صفر و یک باشد، نمودار تابع این گونه می‌شود:



برخی ویژگی‌های این تابع با توجه به نمودارش

۱- این تابع هم یک به یک است و معکوس آن، تابع نمایی است.

۲- تابع لگاریتمی به فرم $0 < a < 1$ ، $y = \log_a^x$ هیچ‌گاه نمی‌تواند محور **y**ها را قطع کند و از آن عبور کند، بلکه به محور **y**ها میل می‌کند.

۳- برخلاف نمودار تابع معکوسش (تابع نمایی)، این تابع محور **x**ها را قطع می‌کند و طول از مبدأ آن $x = 1$ است. (یعنی اگر $y = 0$ آنگاه $x = 1$)

۴- نمودار این تابع نظیر تابع معکوسش، اکیدا نزولی است. (یعنی هرچه مقدار **x** زیاد شود، مقدار $\log_a^x$

که $\text{۰} < a < \text{۱}$ کم و کمتر می‌شود.)

۵- با نگاهی به نمودار تابع $y = \log_a^x$ که $\text{۰} < a < \text{۱}$ درمی‌یابیم که دامنه و برد آن به صورت

بازه‌های $D_y = (\text{۰}, +\infty)$ و $R_y = \mathbb{R}$ می‌باشد.

نمودار تابع لگاریتمی

به طور کلی، دامنه تابع لگاریتمی به فرم $y = \log_{\bigcirc} \Delta$ (که Δ و $\bigcirc$ توابعی از **X** می‌باشند)، از اشتراک ۳ شرط زیر به دست می‌آید:

(۱) $\Delta > ۰$ و (۲) $\bigcirc > ۰$ و (۳) $\bigcirc \neq ۱$

مثال: (سنجش) دامنه تابع $y = \log_{(\frac{x}{۴})}^{(۲۵-x^{۲})}$ شامل چند عدد صحیح است؟

شروط دامنه را اعمال می‌کنیم و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

answer

ویژگی‌های لگاریتم

۱- $\log^{a} = \log_{۱۰}^{a}$

۲- $\log_{a}^{a} = ۱ \quad (a \neq ۱, a > ۰)$

۳- $\log_{a}^{۱} = ۰ \quad (a \neq ۱, a > ۰)$

۴- $\log_{c}^{ab} = \log_{c}^{a} + \log_{c}^{b}$

۵- $\log_{c}^{(\frac{a}{b})} = \log_{c}^{a} - \log_{c}^{b}$

۶- $\log_{b^{m}}^{a^{n}} = (\frac{n}{m})\log_{b}^{a}$

مثال : (مثال کتاب) اگر $\log 2 \simeq 0/3$ ، حاصل $\log 5$ را بیابید.

answer

۷- $\boxed{a^{(\log_c^b)} = b^{(\log_c^a)}}$ (مثلا: $۸^{(\log_۵^۲)} = ۲^{(\log_۵^۸)}$)

۸- قانون تغییر مبنا: گاهی اوقات، بنا به مدل سوالی که مطرح می‌شود، نیاز است $\log_b^a$ را کلا در مبنای c بنویسیم. راهش این است:

$$\boxed{\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}}$$

مثال: اگر $\log ۵ = ۰/۷$ و $\log ۳ = ۰/۴۷$ و $\log ۷ = ۰/۸۴$ باشد، مقدار $\log \frac{۱۲\times ۷^{۳}}{۲۵}$ را به‌دست آورید.

answer

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

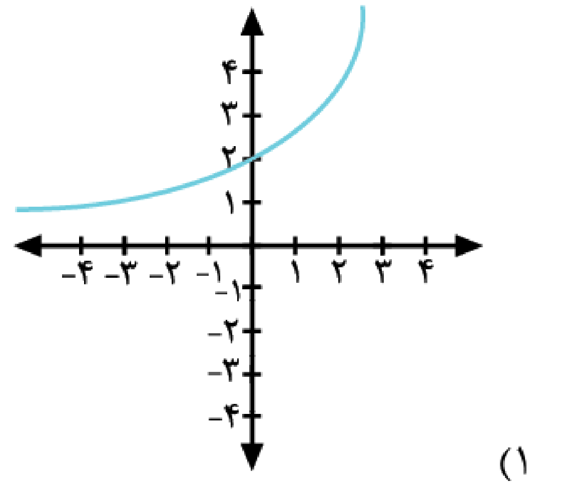
$$\log_{۳}^{(x+۱)} + \log_{۳}^{(x+۴)} = ۲$$

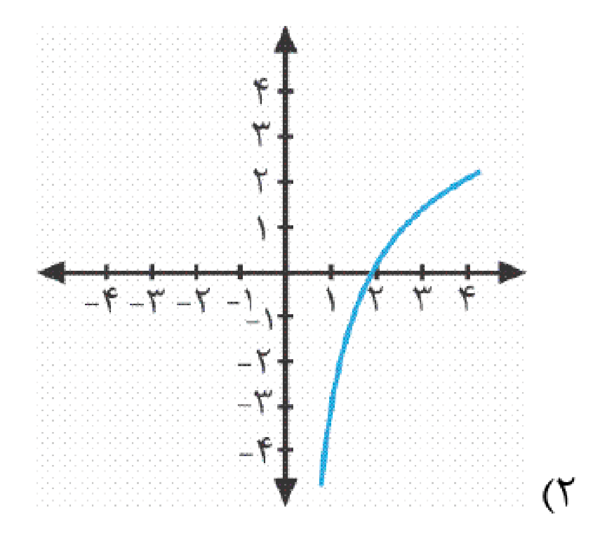
answer

مثال: (فعالیت کتاب) نمودار هر تابع را به ضابطه آن نظیر کنید.

الف) $f(x) = ۲^{x} + ۱$

ب) $g(x) = \log(x - ۱)$





مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$y = -2^{-x} + 1$$

$$y = -\log^{(x-1)}$$

answer

کاربرد توابع لگاریتمی و نمایی

محاسبه انرژی آزادشده در یک زمین‌لرزه

اگر میزان بزرگی یک زمین‌لرزه (**M)** را برحسب ریشتر داشته باشیم، می‌توانیم میزان انرژی آزادشده در آن زلزله را به‌دست آوریم. میزان انرژی آزادشده را با **E** نشان می‌دهند و واحد آن اِرگ (**Erg)** است که از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$$

مثلا یک زلزله ۸ ریشتری اینقدر انرژی آزاد می‌کنه:

$$\boxed{\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵(۸) = ۲۳/۸ \Rightarrow E = ۱۰^{۲۳/۸}\,\text{Erg}}$$

۱- (تمرین کتاب) کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطه $(\frac{۱}{۲},\sqrt{۵})$ روی نمودار تابع با ضابطه $y=۵^x$ قرار دارد.

ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y=۱۰^x$ با محور yها، نقطه $(۰,۱۰)$ است.

پ) دامنه توابع با ضابطه‌های $y=۲^x$ و $y=x^۲$ مساوی‌اند.

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y=۶^x$ با محور xها، نقطه $(۰,۶)$ است.

۲- (تمرین کتاب) معادله‌ی نمایی زیر را حل کنید.

$$۹^{x} = ۳^{x^{۲}-۴x}$$

answer

۳- (تمرین کتاب) حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$۳\log_{۱۰}\sqrt{۱۰۰۰}$$

$$\log_{۳}۲۷^{\frac{۱}{۲}}$$

۴- (تمرین کتاب) اگر $f(x) = ۳ - ۲\log_۴^{(\frac{x}{۲}-۵)}$ ، مقدار $f(۴۲)$ را به دست آورید.

answer

۵- (تمرین کتاب) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a^x$ از نقطه $(۲,۲)$ عبور کند، مقدار a را به دست آورید.

answer

۶- (تمرین کتاب) معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\log_{۳}^{(p^{۲}-۲)} = \log_{۳}^{p}$$

$$\log_{۵}^{(x+۱)} + \log_{۵}^{(x-۱)} = ۱$$

۷- (تمرین کتاب) فرض کنیم . $g(x) = ۴^{x} + ۲$

الف) $g(-۱)$ را به دست آورید. ب) اگر $g(x) = ۶۶$ ، مقدار x چقدر است؟

answer

۸- (تمرین کتاب) نمودار تابع با ضابطه $\mathbf{y = ۴^{x} - ۱}$ را در بازه $[-۲,۲]$ رسم کنید.

۹- (امتحانات سال گذشته) جاهای خالی را پر کنید.

الف) دامنه تابع $y=(\sqrt{۳})^x$ برابر .... و برد آن برابر .... است.

ب) تابع $y=\log_{۰/۲}^{x}$ تابعی یک به یک .... در نتیجه معکوس‌پذیر ....

پ) نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۶})^x$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض .... قطع می‌کند.

ت) نمودار تابع $y=\log_{۵}^{x}$ محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول .... قطع می‌کند.

۱۰- (امتحانات سال گذشته) نامعادله $\frac{۱}{۲۵۶} \leq ۸^{۴p-۲}$ را حل کنید.

answer

۱۱- (امتحانات سال گذشته) حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) $\text{۲}\log_{\text{۵}}^{\text{۳}} - \log_{\text{۵}}^{x} = \log_{\text{۵}}^{\text{۳}} + \log_{\text{۵}}^{\text{۹}}$

ب) $\text{۴}^{(\log_{\text{۲}}^{\sqrt{\text{۵}}} - \log_{\text{۲}}^{\text{۳}})} = ?$

ج) $\log \text{۱۵} = ? \quad (\log \text{۲} = a, \log \text{۳} = b)$

۱۲- (امتحانات سال گذشته) اگر $\log_c^a = \frac{۳}{۴}$ و $\log_c^b = \frac{۷}{۹}$ باشد، مقدار $\log_{b^۳}^{a^۲\sqrt{b}}$ را بیابید.

answer

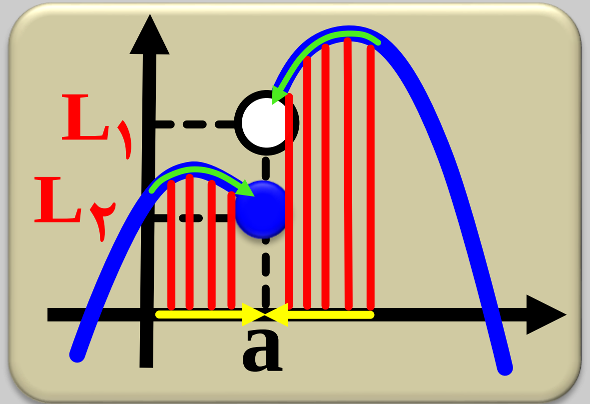
حد و پیوستگی

مفهوم حد

حد راست تابع f در نقطه‌ی a را با $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)$ نشان می‌دهند.

و مفهومش این است که وقتی x به a نزدیک میشود از مقادیر بیشتر، عرض به $L_۱$ میل میکنه!

حد چپش را هم در این ببینید!

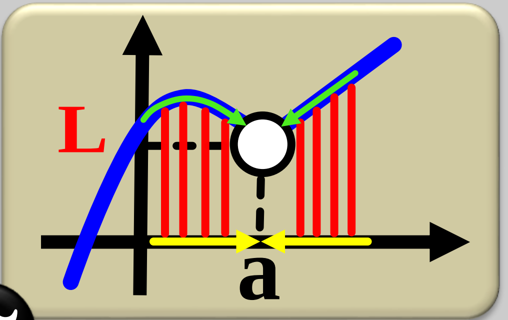


$$\lim_{x\to a^{+}} f(x)=L_۱ \qquad \lim_{x\to a^{+}} f(x)=L_۲$$

تابع f در a حد دارد اگر

اولا در یک همسایگی اطراف a تعریف شود.

ثانیا مقادیر حد راست و چپش در a برابر شود.



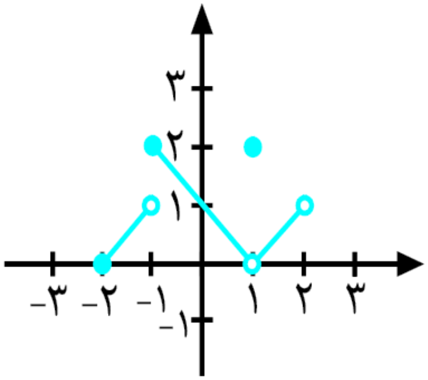
ex آیا تابع $y=\sqrt{۴-x^{۲}}$ در نقاط به طول ۲، ۱- و ۳ حد دارد؟! اگر بله مقدارش ؟!

توجه حد یک تابع در **a** و مقدارش در این نقطه به هم هیچ ربطی ندارند!

مثال: (تمرین کتاب) برای تابع f که نمودار آن داده شده‌است، کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۲$

ب) $f(۱) = ۲$



answer

پ) $f(۲)=۱$

ت) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۰$

answer

ث) $\lim\limits_{x \to -۱} f(x) = ۲$

ج) $\lim\limits_{x \to ۰} f(x) = ۱$

چ) $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) =$ وجود ندارد

answer

مثال: (تمرین کتاب) آیا حد تابع زیر در $x = ۲$ موجود است؟

answer

مثال: نمودار دو تابع $f(x)=\frac{|x-۳|}{x-۳}$ و $g(x)=۱$ را رسم کنید. آیا $\lim_{x\to ۳} f(x)$ موجود است؟ (چرا؟) $\lim_{x\to ۳} g(x)$ چطور؟ در چه نقاطی حد دو تابع با هم برابرند؟

answer

محاسبه حدود ← **اصول اربعه‌ی سرهنگی**

اولین گام در محاسبه‌ی حدود یک جایگذاری درست و اصولی است! به اصول اربعه‌ی(٤گانه) من در محاسبات حدی گوش فرا دهید تا از رستگاران این فصل بشید :)

Rule No.1

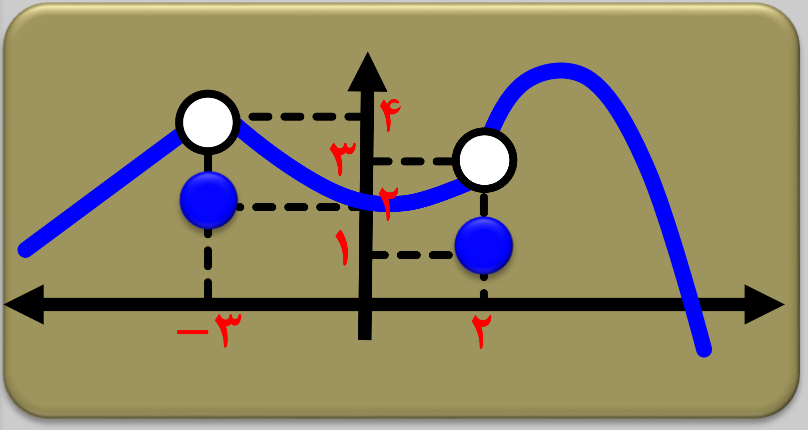
چندجمله‌ای
نمایی لگاریتمی
مثلثاتی
رادیکالی

← جایگذاری ساده انجام میریم!

اینجا برامون مهم نیست که $x \to a^+$ ، $x \to a^-$ یا $x \to a$! خود a رو جایگذاری میکنیم!

توجه وقتی بجای ایکس‌ها قرار میدهیم a ، درواقع a نسبی را جایگذاری میکنیم نه a مطلق!

ex شکل زیر نمودار تابع f است. با توجه به آن حاصل حد داده شده را بیابید! باتشکر!



$$\lim_{x \to ۲} \frac{f(x)+۲x\cos((x-۱)\pi)}{۲^{x-۲}+f(-x-۱)}=?$$

Rule No. 2

رفتار درست با جزصحیح

جزصحیح رو به چشم یه عدد ببینید! یعنی هرجای حد، یه براکت دیدی اول اونو تعیین مقدار کن!

خود عدد(نه کمتر یا بیشترش) رو جایگزاری کن! بعدش...

اگر داخل براکت صحیح شد، یکبار دیگه با دقت جایگزاری را تکرار کنید!

اگر داخل براکت غیرصحیح شد، همان را حساب کنید!

ex $\lim\limits_{x \to ۱/۵} [-۲x]$

ex $\lim\limits_{x \to ۲^-} \dfrac{[-x]+\sin \pi x}{۳^{x-۲}+[\frac{-x}{۳}-۱]}$

Rule No. 3 ← رفتار درست با قدرمطلق

اگه بعد از جایگذاری داخل قدر مطلق صفر شد باید تعیین علامت شود! والسلام!

ex $\lim_{x\to -۲^-} \dfrac{|x-۲|-[-x]}{\sqrt{-x+۲}}$

ex $\lim_{x\to -۱^+} \dfrac{|x^۲-۱|}{x[-x+۱]+۱}$

ابهام $\frac{0}{0}$: در مسائل حدی، گاهی اوقات پس از جایگذاری در یک تابع کسری، به عبارت $\frac{0}{0}$ برمی‌خوریم که

به آن ابهام $\frac{0}{0}$ می‌گویند و باید با روش‌های زیر، حد را رفع ابهام کنیم و جوابش را بیابیم.

روش اول: اگر در محاسبه $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$، ($P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای‌اند) به ابهام $\frac{0}{0}$

برخورد کنیم، چون $P(x)=Q(x)=0$، پس $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ (عامل صفرساز)

بخش‌پذیرند. صورت و مخرج را بر $x-a$ تقسیم می‌کنیم تا تجزیه شوند، سپس عوامل صفرساز صورت و مخرج

$(x-a)$ را با هم ساده می‌کنیم.

مثال: حاصل حد زیر را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to -۱} \frac{x^{۳} - ۳x^{۲} - ۲x + ۲}{x^{۲} - ۱}$$

نکته: لزومی ندارد برای تجزیه حتما تقسیم کنیم. اگر توانستید با استفاده از اتحادها هم می‌توانید تجزیه کنید.

روش دوم: اگر در صورت یا مخرج عبارتی رادیکالی با فرجه ۲ ($\sqrt{\Delta} \pm a$) دیدید، باید صورت و مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب کنید، بعد عامل صفرساز صورت و مخرج را با هم ساده کنید.

مثال: هر یک از حدهای زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{x}-۱}{x^{۲}-۵x+۴}$$

$$\lim_{x\to -۲} \frac{\sqrt{x+۶}+x}{(x^{۳}+۸)}$$

مثال: (تمرین کتاب) اگر $\lim_{x\to ۳} f(x) = ۳$ و $\lim_{x\to ۲} g(x) = ۰$ و $\lim_{x\to ۲} h(x) = -۱$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

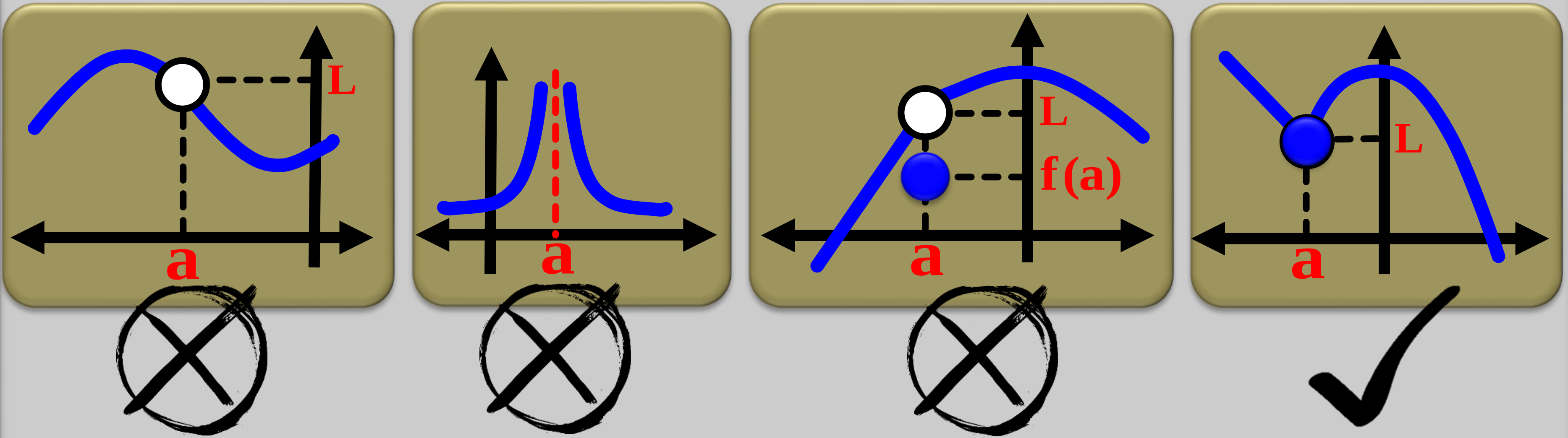
$$\lim_{x\to ۲} (f(x) + h(x))$$

$$\lim_{x\to ۲} (h(x))^{۵}$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۳f(x)}{g(x) - ۵h(x)}$$

پیوستگی

تابع f در a پیوسته است اگر بتوان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ نمودارش را آنجا رسم کرد!



تعریف ریاضی

تابع f در a پیوسته است هرگاه حدش در این نقطه موجود و با مقدارش برابر باشد!

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-۳ & x<۲ \\ -۲ & x=۲ \\ -x+۲ & x>۲ \end{cases}$ را رسم کنید. سپس وضعیت پیوستگی آن را روی نقاط دامنه‌اش بررسی کنید.

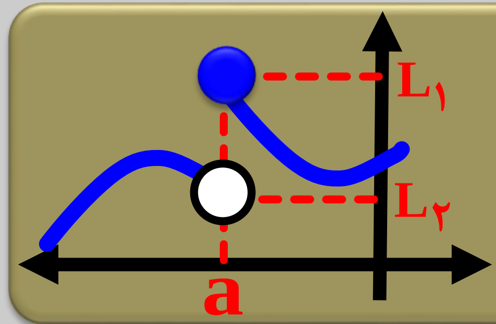
answer

مثال: مقدار a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} bx-۱ & x<۳ \\ ۵ & x=۳ \\ x+a & x>۳ \end{cases}$ در نقطه $x=۳$ پیوسته باشد.

answer

پیوستگی راست!

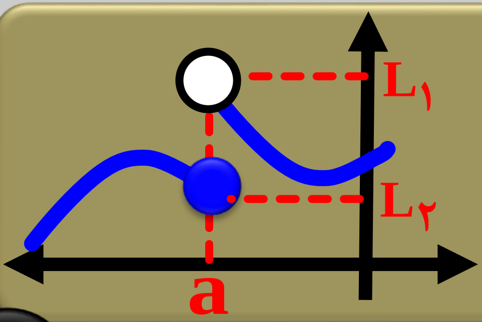
اگر فقط حد راست و مقدار برابر باشند و این دو با حد چپ برابر نباشند!



$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)=L_1 \neq \lim_{x\to a^-} f(x)=L_2$$

پیوستگی چپ!

اگر فقط حد چپ و مقدار برابر باشند و این دو با حد راست برابر نباشند!



$$\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)=L_2 \neq \lim_{x\to a^+} f(x)=L_1$$

مثال: تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$ با نمودار مقابل را در نظر بگیرید.

الف) کدام یک از حدهای $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ و $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ موجودند؟

ب) آیا $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجود است؟

پ) آیا تابع در $x=2$ پیوسته است؟

پیوستگی روی یک بازه!

نوع بازه	شرط پیوستگی تابع f روی بازه
(a,b)	تابع f باید در همه‌ی نقطه‌های موجود در این بازه، پیوسته باشد. **این‌جوری هم ببین:** تابع در هیچ‌یک از نقطه‌های این بازه، ناپیوسته نباشد.
$[a,b)$	۱ تابع f در بازه‌ی بازِ (a,b) پیوسته باشد و اصلاً در این بازه نقطه‌ی ناپیوستگی نداشته باشد. ۲ تابع در نقطه‌ی a باید پیوستگی راست داشته باشد: $\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)}$
$(a,b]$	۱ تابع f در بازه‌ی بازِ (a,b) پیوسته باشد و اصلاً در این بازه نقطه‌ی ناپیوستگی نداشته باشد. ۲ تابع در نقطه‌ی b باید پیوستگی چپ داشته باشد: $\boxed{\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)}$
$[a,b]$	۱ تابع f در بازه‌ی بازِ (a,b) پیوسته باشد و اصلاً در این بازه نقطه‌ی ناپیوستگی نداشته باشد. ۲ تابع در نقطه‌ی a پیوستگی راست داشته باشد. $\boxed{f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)}$ ۳ تابع در نقطه‌ی b پیوستگی چپ داشته باشد. $\boxed{f(b)=\lim_{x\to b^-} f(x)}$

مثال: تابع f با ضابطه مقابل را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^۲-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$$

الف) نمودار f را رسم کنید.

ب) دامنه و برد f را به دست آورید.

ج) آیا دردامنه‌اش پیوسته است؟

answer

۲- (تمرین کتاب) تابعی مانند $\mathbf{f}$ ارائه کنید که در نقطه ۳ فاقد حد باشد و $\mathbf{f(۳) = ۱}$.

۳- (تمرین کتاب) تابعی مانند $\mathbf{f}$ ارائه کنید که در نقطه ۲ تعریف نشده باشد و $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = ۴$

۴- (تمرین کتاب) اگر $f(x)=\frac{|x|}{x}$ ، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ موجود است؟

۵- (تمرین کتاب) حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to -۲} \frac{x^{۳}+۸}{x+۲}$$

$$\lim_{x\to ۰^{-}} \sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{x-۲}{[x]+۱}$$

$$\lim_{x\to -۲^+} \frac{x}{[-x]}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\mathrm{Sin}^۲ x}{۱-\mathrm{Sin}\, x}$$

۶- (تمرین کتاب) توابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲-۹}{x-۳} & x\neq ۳\\ ۶ & x=۳\end{cases}$ و $g(x)=\frac{x^۲-۹}{x-۳}$ را در نظر بگیرید و پیوستگی این توابع را در $x=۳$ بررسی کنید.

answer

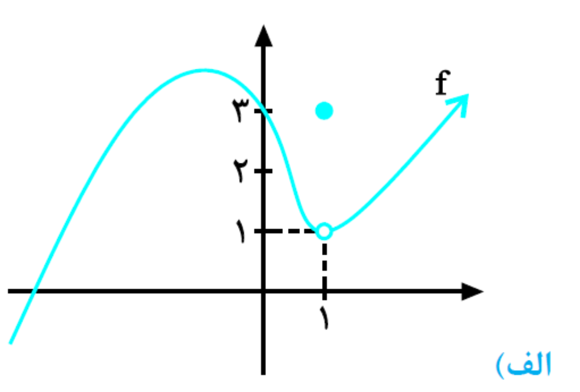
۷- (تمرین کتاب) با توجه به نمودار تابع $f(x)=[x]$ ، f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

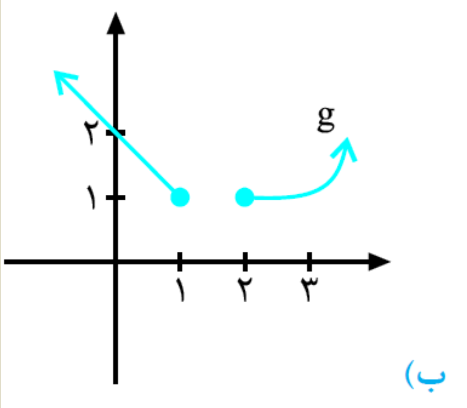
۸- (تمرین کتاب) پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}-۲x+۲ & x\leq ۰\\ x^۲+۲ & x>۰\end{cases}$ را در نقطه $x=۰$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

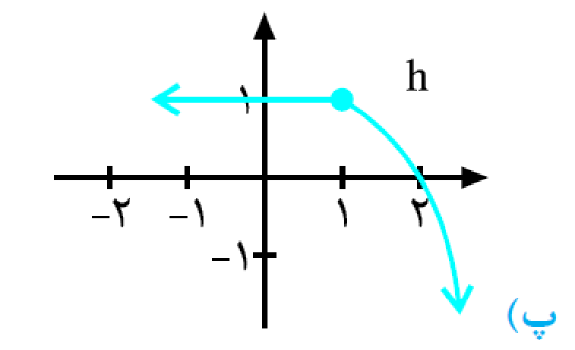
۹- (تمرین کتاب) تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطه $x = ۱$ مساوی ۱- باشد، ولی تابع در ۱ پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.

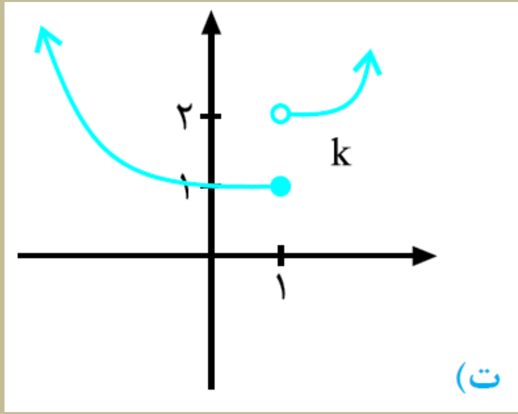
answer

۱۰- (تمرین کتاب) کدام یک از توابع زیر در $x=1$ پیوسته است؟









۱۲- (امتحانات سال گذشته) الف) تابع $y = x - [x]$ را رسم کنید و سپس وضعیت پیوستگی آن را در بازه‌های $[۰,۱)$ و $(-۱,۰)$ بررسی کنید. ب) آیا تابع در بازه‌های $[-۱,۱)$ پیوسته است؟ چرا؟

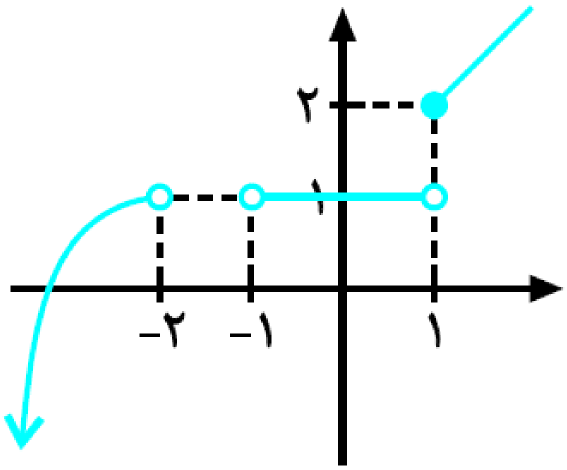
answer

۱۳- (امتحانات سال گذشته) حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to ۵} \frac{۳x^۲ - ۱۳x - ۱۰}{x^۲ - ۶x + ۵}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱ - \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos}^۲ x}$$

۱۴– (امتحانات سال گذشته) نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با توجه به نمودار، حاصل حدهای خواسته شده را بنویسید.



þ ²I) $\lim\limits_{x \to ۱^{+}} f(x)$

J) $\lim\limits_{x \to ۱^{-}} f(x)$

N) $\lim\limits_{x \to ۱} f(x)$

R) $\lim\limits_{x \to -۲} f(x)$

۱۵- (امتحانات سال گذشته) حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-۱}{x^۲-۴x+۳}$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{|x-۲|}{x-۲}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\operatorname{Sin} x-\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin}^۲ x-\operatorname{Cos}^۲ x}$$

مخصوص رشته ریاضی

روش سوم: اگر $\Delta \to ۰$ آنگاه داریم:

$$\lim_{\Delta \to ۰} \frac{\Delta}{\sin \Delta} = ۱$$

$$\lim_{\Delta \to ۰} \frac{\sin \Delta}{\Delta} = ۱$$

توجه داشته باشید حتما کمان جلوی $\sin$ باید با عبارت داخل صورت (یا مخرج) دقیقا یکی باشد.

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\tan^۲ ۵x}{x^۲}$$

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\sin ۲x}{۳x}$$

روش چهارم (تغییر متغیر): حواست باشه اینجا رو می‌خوام خودمونی بگم! در حدود یا ابهام $\frac{0}{0}$ که هم عبارت جبری داشتی (مثل $2x-\pi$) هم عبارت مثلثاتی (مثل $\cos x$) و کمان به سمت یه عبارت دارای π میل می‌کرد (مثل $x \to \frac{\pi}{2}$)، با تغییر متغیر مسئله را حل کنید. به این صورت که اگر $x \to \alpha$، آنگاه $x-\alpha=t$، طوری که $t \to 0$. به جای x هم قرار دهید $t+\alpha$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi}{\cos x}$$

در محاسبات حدی، ۲ اتحاد زیر را بیاد بسپارید:

$$\boxed{1+\cos 2\Delta = 2\cos^2\Delta}$$

$$\boxed{1-\cos 2\Delta = 2\sin^2\Delta}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{4x - \pi}$$

۱۸- (تمرین کتاب) مقدار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را چنان تعیین کنید که تابع
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^{2}} & x>0\\ b-1 & x=0\\ x-2a & x<0\end{cases}$$
در نقطه $x=0$ پیوسته باشد.

answer

$$\lim_{x \to ۰} \frac{۲ - ۲\cos ۲x}{x \sin x}$$

آمار و احتمال

احتمال شرطی

احتمال وقوع پیشامد A است به شرط آن که برانیم B اتفاق افتاده است : $p(A|B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$

روش حل مسائل احتمال شرطی

ابترا باید تشخیص دهیم مساله داده شده از نوع احتمال شرطی است. به این صورت که در متن سوالات، کلماتی مثل

"اگر" یا "می‌دانیم" آورده شده و یا به صورت گنگ یک شرط بر روی فضای نمونه‌ای اعمال شده است. پس از تشخیص،

شرط گفته شده را روی فضای نمونه‌ای اعمال می‌کنیم و یک فضای نمونه‌ای جدید می‌سازیم

(S_{new}) بعد احتمال را روی فضای جدید حساب می‌کنیم.

نکته: از فرمول، بیش‌تر در مسائل جبری احتمال شرطی یا مواقعی که فضای نمونه‌ای در دسترس نباشد، استفاده می‌کنیم.

مثال: پدر مهسا ۳ فرزند دارد. احتمال آن که فقط دوتای آن‌ها پسر باشد کدام است؟

مثال: احتمال وقوع نوعی بیماری در یک جامعه‌ی مشخص برابر ۰/۰۴ و احتمال این که فردی هم دچار این بیماری شود و هم درمان یابد برابر ۰/۰۲ است. اگر فردی به بیماری مذکور دچار شده باشد، احتمال درمان یافتن او چقدر است؟

دو پیشامد A و B مستقلند $\Leftrightarrow$ $p(A)\times p(B) = \boxed{p(A\cap B)}$

مثال: در پرتاب یک تاس، فرض کنید پیشامد A ظاهر شدن عدد زوج، پیشامد B ظاهر شدن عددی بخش‌پذیر بر ۳ و پیشامد C ظاهر شدن عددی بزرگ‌تر از ۲ باشد؛ مستقل یا وابسته بودن هر دو تا از این پیشامدها را بررسی کنید.

مثال: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $p(A)=\frac{۲}{۵}$ و $p(A\cup B)=\frac{۱}{۲}$ ، آنگاه $p(B')$ را به دست آورید.

answer

نکته: اگر A و B مستقل باشند، داریم: $p(A|B)=p(A) \Leftarrow$

یعنی از مستقل بودن هر کدام، مستقل بودن ۳ حالت دیگر را می‌توان نتیجه گرفت.

A,B مستقل $\Leftrightarrow$ A',B مستقل $\Leftrightarrow$ A,B' مستقل $\Leftrightarrow$ A',B' مستقل

مثال: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، $1-p(A\cup B)$ کدام است؟

۱) $p(A')p(B')$

۲) $p(A')p(B)$

۳) $p(A)p(B')$

۴) $1-p(A)p(B)$

آمار توصیفی

معیارهای گرایش به مرکز (شاخص‌های مرکزی):

به وسیله شاخص‌های مرکزی، می‌توان مرکزیت داده‌ها را از نظر مقدار، تعداد و حتی تراکم (که در کتاب درسی نیامده) به دست آورد.

میانگین: میانگین، ساده‌ترین و در عین حال پرکاربردترین معیار گرایش به مرکز است. میانگین در واقع مرکزیت مقداری داده‌ها را مشخص می‌کند و مرکز ثقل داده‌ها را تعیین می‌نماید. طبق تعریف داریم:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i}{N} = \frac{x_۱ + x_۲ + \ldots + x_N}{N}$$

مثال: معدل حدسی تعدادی نمره ۱۱ در نظر گرفته شده و تفاوت آن از یکایک نمرات ۵-، ۱-، ۳ و ۷ گردیده است.

معدل واقعی نمرات کدام است؟

answer

ویژگی‌های میانگین

۱- اگر داده‌ها را با عدد c جمع (یا تفریق) کنید، میانگین هم با همان عدد جمع (یا تفریق) می‌شود.

۲- اگر داده‌ها را در عدد k ضرب کنیم، میانگین هم k برابر می‌شود.

۳- به طور کلی داریم: $\overline{x}(kx_i+c) = k\overline{x}_{x_i} + c$

(یعنی هر بلایی سر داده‌ها بیارید، سر میانگین هم همون بلا میاد!)

۴- میانگین با داده‌ها هم‌واحد است.

۵- مجموع "انحرافات داده‌ها از میانگین" صفر است. یعنی: $\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})=0$

میانه

میانه، مرکزیت تعدادی داده‌ها را مشخص می‌کند. یعنی پس از مرتب کردن داده‌ها به ترتیب صعودی، میانه داده‌ای است که تعداد داده‌های قبل و بعد از آن با هم برابر باشد. میانه را با $Q_۲$ یا $\tilde{x}$ (بخوانید ایکس مَدْ) نشان می‌دهند.

طریقه به‌دست آوردن میانه

گام اول: ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

گام دوم: اگر فرض کنیم N تعداد داده‌هاست، شماره میانه می‌شود $\frac{N+۱}{۲}$.

۱- اگر N فرد باشد، شماره میانه عددی رُند می‌شود که در این حالت میانه، داده وسط و در واقع یکی از خود داده‌هاست.

۲- اگر N زوج باشد، شماره میانه غیررُند می‌شود که در این حالت میانه می‌شود میانگین ۲ داده وسط. در این حالت ممکن است میانه از خود داده‌ها نباشد.

مثال: میانه داده‌های ۵۱، ۶۳، ۵۴، ۹۶، ۹۵، ۷۵، ۸۵ را به دست آورید.

مثال: میانه داده‌های ۸۵، ۹۳، ۸۵، ۵۱ را به دست آورید.

معیارها (یا شاخص‌های) پراکندگی

دامنه تغییرات : دامنه تغییرات ساده‌ترین شاخص پراکندگی است که اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها را مشخص می‌کند و با نماد R نشان داده می‌شود.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

ویژگی‌های دامنه تغییرات

۱- دامنه تغییرات، شاخصی سریع اما کم‌دقت برای بیان پراکندگی داده‌هاست.

از این جهت کم‌دقت است که مقدارش فقط به x_{max} و x_{min} وابسته است و با تغییر تعداد و مقدار داده‌های میانی، مقدار آن تغییر نخواهد کرد.

نتیجه: در صورت وجود داده‌های دورافتاده، استفاده از دامنه تغییرات به عنوان معیاری برای بیان میزان پراکندگی داده‌ها اصلا مناسب نیست.

۲- اگر به همه‌ی داده‌ها مقدار ثابت k اضافه کنید، R تغییری نخواهد کرد. (با عقل جور درمی‌آید!! وقتی همه داده‌ها را با یک عدد ثابت جمع می‌کنید، پراکندگی آن‌ها نسبت به هم نباید تغییر کند!!)

۳- اگر داده‌ها را m برابر کنید، دامنه $|m|$ برابر می‌شود. (چون هم x_{max} در m ضرب می‌شود هم x_{min}!)

۴- و به طور کلی داریم: $R_{mx_i+k} = |m| \times R_{xi}$

۵- دامنه تغییرات هم‌واحد داده‌هاست. (یعنی اگر مثلا داده‌ها کمیتی طولی با واحد متر باشن، دامنه تغییرات هم یک کمیت طولی با واحد متر خواهد بود.)

۶- اگر چند داده برابر باشند $R = ۰$ و اگر برای چند داده $R = ۰$ یعنی داده‌ها با هم برابرند.

واریانس ($\sigma^۲$ ، بخوانید سیگما دو)

تعریف واریانس: می‌شود میانگین «مجذور انحرافات از میانگین». داریم:

$$\sigma^۲ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{N} = \frac{(x_۱ - \bar{x})^۲ + (x_۲ - \bar{x})^۲ + \ldots + (x_N - \bar{x})^۲}{N}$$

گام اول: میانگین داده‌ها را به دست بیار.

گام دوم: انحراف داده‌ها از میانگین را حساب کن. $(x_i - \bar{x})$

گام سوم: انحرافات را به توان ۲ برسان. ($(x_i - \bar{x})^۲$)

گام چهارم: میانگین داده‌های گام سوم (مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین) را حساب کن، همان واریانس داده‌هاست.

مثال: واریانس داده‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را حساب کنید.

answer

ویژگی‌های واریانس

۱- اگر چند داده با هم برابر باشند، واریانس آن‌ها صفر است و اگر واریانس چند داده صفر باشد، آن چند داده با هم برابرند.

۲- اگر داده‌های آماری را با عدد ثابتی جمع (یا تفریق) کنید، واریانس این داده‌ها تغییری نخواهد کرد. به عبارت دیگر: $\sigma^2_{x_i+k} = \sigma^2_{x_i}$

۳- اگر داده‌ها را در عدد ثابت m ضرب کنید، واریانس در m^2 ضرب می‌شود. به عبارت دیگر:

$$\sigma^2_{mx_i} = (m)^2 \sigma^2_{x_i}$$

۴- و به طور کلی داریم؛ $\sigma^{۲}_{mx_i+k} = m^{۲}\sigma^{۲}_{x_i}$

۵- واحد واریانس برابر با توان دوم واحد داده موردنظر است.

۶- واریانس بزرگ نشان‌دهنده‌ی دور بودن داده‌ها از میانگین و واریانس کوچک نشان‌دهنده‌ی نزدیک بودن داده‌ها به میانگین است و واریانس صفر هم (همان‌طور که اشاره شد) نشان‌دهنده‌ی برابری داده‌هاست. پس واریانس معیار خوبی برای سنجش پراکندگی و تغییرپذیری داده‌ها نسبت به میانگین است.

مثال: اگر واریانس داده‌های b_i برابر ۱۸ باشد و داشته‌باشیم $b_i = (-۳a_i) + ۴$ ، واریانس داده‌های $(۲a_i) - ۵$ کدام است؟

answer

انحراف معیار (σ ، بخوانید سیگما)

جذر مثبت واریانس است. پس برای محاسبه آن کافی است واریانس را محاسبه کنید، بعد از آن جذر بگیرید.

فرمول محاسبه انحراف معیار

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})^۲}{n}}} \Leftarrow$$

ویژگی‌های انحراف معیار

۱- اگر انحراف معیار چند داده صفر باشد، یعنی داده‌ها برابرند و برعکس. (یعنی اگر چند داده برابر باشند، انحراف معیار آن‌ها صفر است.)

۲- اگر داده‌ها را با عدد k جمع (یا تفریق) کنیم، انحراف معیار تغییری نمی‌کند. $\sigma_{x_i+k} = \sigma_{x_i}$

۳- اگر داده‌ها را در عدد m ضرب کنیم، انحراف معیار در $|m|$ ضرب می‌شود. (به این دلیل در $|m|$ ضرب می‌شود که انحراف معیار، جذر مثبت واریانس است و بنابراین مقدار آن همیشه بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.) $\sigma_{mx_i} = |m|\sigma_{x_i}$

۴- به طور کلی داریم: $\sigma_{mx_i+k} = |m|\sigma_{x_i}$

۵- واحد انحراف معیار از جنس واحد داده‌هاست.

۶- مقدار انحراف معیار هر چه بزرگ‌تر باشد، یعنی پراکندگی داده‌ها حول میانگین بیش‌تر و هر چه مقدارش کم‌تر باشد، یعنی پراکندگی داده‌ها نسبت به میانگین کم‌تر است. اما عددی که انحراف معیار می‌دهد، از عدد واریانس معقول‌تر و منطقی‌تر است.

مثال: اگر انحراف معیار داده‌های $-\frac{۱}{۲}x_۱+۲, -\frac{۱}{۲}x_۲+۲, \ldots, -\frac{۱}{۲}x_n+۲$ برابر باشد، انحراف معیار داده‌های $۵x_۱-۱, ۵x_۲-۱, \ldots, ۵x_n-۱$ را به دست بیاورید تو دلیا!

answer

ضریب تغییرات

برابر است با نسبت انحراف معیار به میانگین. یعنی: $CV = \frac{\sigma}{\bar{X}}$

ضریب تغییرات معمولا به صورت درصد بیان می‌شود. ضریب تغیرات واحد اندازه‌گیری ندارد. (چون واحدهای σ و $\bar{X}$ با هم برابرن و از صورت و مخرج ساده میشن.)

ویژگی‌های ضریب تغییرات

۱- ضریب تغییرات مخصوص داده‌های مثبت است.

۲- اگر داده‌ها برابر باشند، ضریب تغییرات صفر است. (چون $\sigma = ۰$) و اگر ضریب تغییرات چند داده صفر باشد، داده‌ها برابرند.

۳- اگر داده‌ها را در عدد ثابت m ضرب کنیم، ضریب تغییرات تغییری نخواهد کرد. چون هم σ در m ضرب می‌شود، هم $\bar{X}$ ، پس: $CV_{mx_i} = CV_{x_i}$

۴- اگر داده‌ها را با عدد ثابت k جمع کنیم، CV به صورت منظم تغییر نمی‌کند. چون صورت آن () بدون تغییر باقی می‌ماند و مخرجش ($\bar{x}$) تغییر می‌کند و با K جمع می‌شود.

توجه: اگر داده‌ها را با عدد ثابت $k(k>0)$ جمع (تفریق) کنیم، CV کاهش (افزایش) می‌یابد. $CV_{x_i \pm k} = \dfrac{\sigma_{x_i}}{\bar{x} \pm k}$

۵- به طور کلی می‌توان گفت:

$$CV_{mx_i \pm k} = \frac{|m|\sigma_{x_i}}{(m\bar{x}) \pm k}$$

۶- اینکه CV به واحد اندازه‌گیری داده‌ها بستگی ندارد (چون واحد ندارد) یک مزیت برای این شاخص به حساب می‌آید. چون تحت شرایطی که داده‌های مربوط به کمیت در دو جامعه با واحدهای متفاوت بیان شده باشد و یا داده‌ها با واحدهایی که نمی‌شناسیم ارائه شده باشند، می‌توان برای مقایسه پراکندگی داده‌ها در دو گروه داده از آن

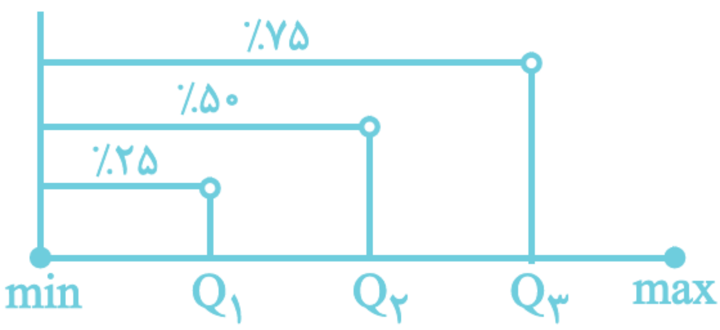
$x = b$

استفاده کرد. (مثلا برای مقایسه پراکندگی اعداد مربوط به قد کلاس A با وزن کلاس B. یا مثلا برای مقایسه شدت نور در دو آزمایش مختلف که با واحد کندِلا (Candela) بیان شده‌اند که برای ما ملموس نیست.)

مثال: ضریب تغییرات سن دانش‌آموزان کلاس شما ۱۰ سال بعد چه تغییری خواهد کرد؟

answer

چارک‌ها (همان چهار یک به معنی ربع است، فرنگی آن می‌شود Quarter)



چارک اول و دوم و سوم را در نمودار روبه‌رو ببینید.

روش محاسبه چارک‌ها

گام اول: ابتدا میانه (همان Q_2 یا $\tilde{x}$) را به دست آورید.

گام دوم: سپس برای داده‌های مرتب شده‌ی قبل از میانه (خودِ میانه حساب نیست) یک میانه به دست بیاورید و آن را چارک اول بنامید. (Q_1)

گام سوم: برای داده‌های مرتب شده بعد از میانه (خودِ میانه حساب نیست) یک میانه به دست آورید و آن را چارک سوم بنامید. (Q_3)

مثال: چارک‌های اول و دوم و سوم را درهر مورد، به دست آورید.

الف) ۴ و ۸ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۴ و ۲۱ و ۲۴

ب) ۴ و ۸ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۴ و ۲۱

answer

۱- (تمرین کتاب) احمد به احتمال ۰/۷ در تیم کوهنوردی مدرسه‌اش و به احتمال ۰/۸ در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) در هر دو تیم موردنظر انتخاب شود. ب) در هیچ کدام از دو تیم انتخاب نشود.

پ) فقط در تیم ملی انتخاب شود. ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود. ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

۲- (کتاب درسی) احتمال این که رویا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال این که حداقل یکی از آن‌ها در درس ریاضی قبول شوند، برابر **۰/۶۲۵** باشد، رویا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

answer

۳- (کتاب درسی) دو تاس با هم پرتاب شده‌اند. احتمال آن که هر دو عدد رو شده زوج باشند، به شرط اینکه بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر ۸ است را به دست آورید.

answer

۴- (کتاب درسی) ترکیبی از ۶ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آن‌ها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده A، $\frac{۱}{۵}$ و احتمال واکنش نشان دادن ماده B، $\frac{۱}{۷}$ است. اگر ماده A واکنش دهد، احتمال واکنش نشان دادن ماده B، $\frac{۱}{۴}$ خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

answer

۵- (تمرین کتاب) درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر مقدار ثابت C از داده‌ها کم شود، انحراف معیار به اندازه $\sqrt{C}$ کاهش می‌یابد.

ب) اگر مقدار ثابت C به داده‌ها اضافه شود، ضریب تغییرات بزرگتر می‌شود.

پ) اگر مقدار ثابت $\frac{۱}{C}$ در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار $\frac{۱}{C}$ برابر می‌شود.

ث) اگر مقدار ثابت C در داده‌ها ضرب شود، ضریب تغییرات ثابت می‌ماند.

۸- (امتحانات سال گذشته) احتمال برد استقلال در برابر پرسپولیس ۰/۷ است. اگر هنگام بازی یک تاس و یک سکه هم بیاندازیم، احتمال برد استقلال و رو آمدن سکه و کمتر از ۵ آمدن تاس چند است؟

answer

۹- (امتحانات سال گذشته) اختلاف پنج داده آماری از میانگین آن‌ها برابر ۳ و ۲- و ۴- و ۱- و ۱ می‌باشد. واریانس این پنج داده آماری را به دست آورید.

answer

۱۰- (امتحانات سال گذشته) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، به طوری که $p(A|B)=\frac{۱}{۲}$ و $p(B)=\frac{۱}{۳}$ ، آنگاه $p(A\cup B)$ را بیابید.

answer

۱۱- (امتحانات سال گذشته) یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم؛

پیشامد A که در آن تاس عدد فرد بیاید را مشخص کنید.

پیشامد B که در آن سکه «رو» و تاس عدد کوچکتر از ۵ بیاید را مشخص کنید. آیا این دو پیشامد مستقلند؟ چرا؟

۱۲- (امتحانات سال گذشته) اگر میانگین ده داده‌ی آماری برابر ۵ و ضریب تغییرات ۳ باشد:

الف) واریانس داده‌ها کدام است؟ ب) اگر دو داده‌ی ۵ و ۵ به داده‌های قبلی اضافه شود، ضریب تغییرات ۱۲ داده را بیابید.