حسابان ۲

فصل ۱ :

تابع

(۷ نمره)

مثال) (کار در کلاس) الف) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را با دامنه $[۰,۴]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.

answer

ب) نمودار تابع $k(x)=f(x-۲)$ و $g(x)=f(x)+۳$ را به کمک انتقال رسم کنید.

answer

ج) دامنه و برد توابع k و g را با دامنه و برد تابع f مقایسه کنید.

answer

انبساط و انقباض عمودی

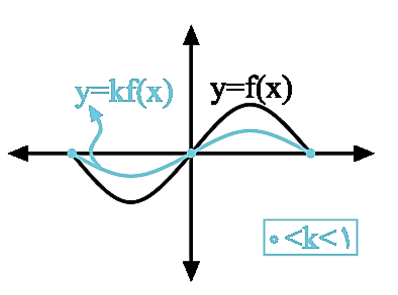
۱- رسم نمودار : $y = kf(x)$

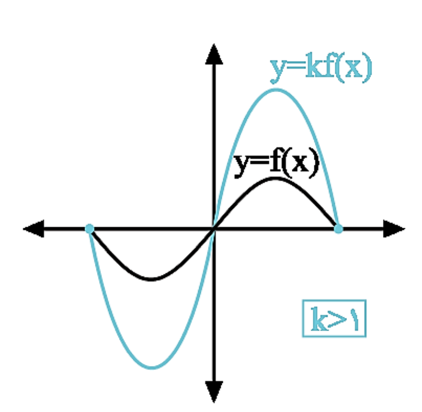
اگر $0 < |k| < 1$ ، نمودار $f(x)$ با ضریب **k** به طور عمودی منقبض می‌شود.

اگر $|k| > 1$ ، نمودار $f(x)$ با ضریب **k** به طور عمودی منسبط می‌شود.

دامنه دو تابع $y = f(x)$ و $y = Af(x) + B$ یکی است، اما حدود برد آن‌ها صرفاً یکی نیست.

نیم نگاهی به دو نمودار مقابل بیاندازید:

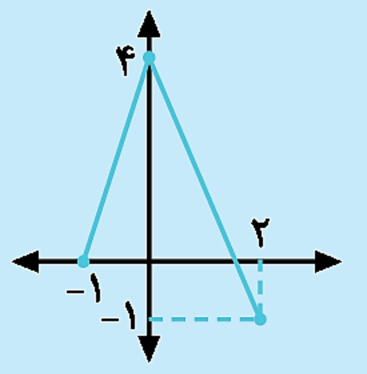




نکته: حواست باشه اگر k منفی بود، اول بدون توجه به علامت منفی، انقباض یا انبساط عمودی رو انجام بده، بعد نسبت به محور xها قرینه کن!

مثال: در شکل زیر، نمودار $y=f(x)$ داده شده، به کمک آن نمودار $y=-\frac{۱}{۲}f(x)+۱$ را رسم کنید.

answer



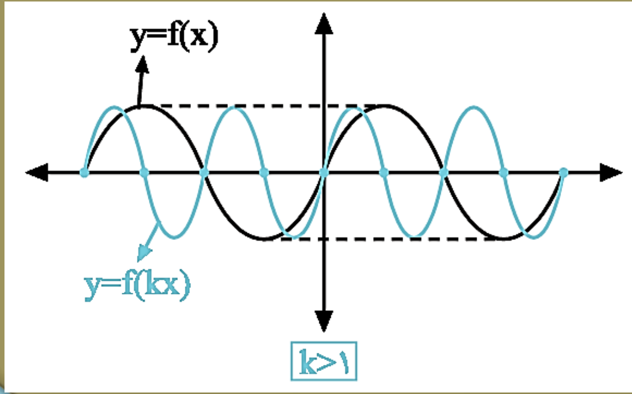
۲- رسم نمودار: $y = f(kx)$

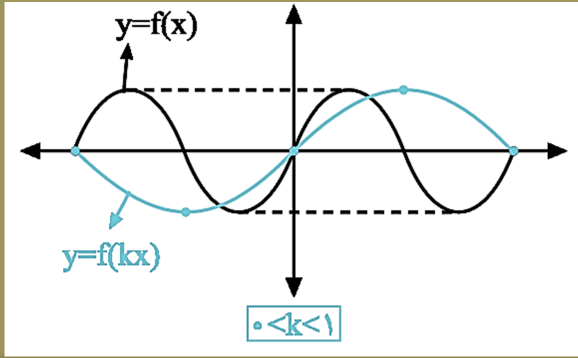
اگر $0 < |k| < 1$ ، نمودار $f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ به طور عمودی منبسط می‌شود.

اگر $|k| > 1$ ، نمودار $f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ به طور عمودی منقبض می‌شود.

برد دو تابع $y = f(\Delta)$ و $y=f(\square)$ یکی است، اما دامنه آن‌ها صرفاً یکی نیست.

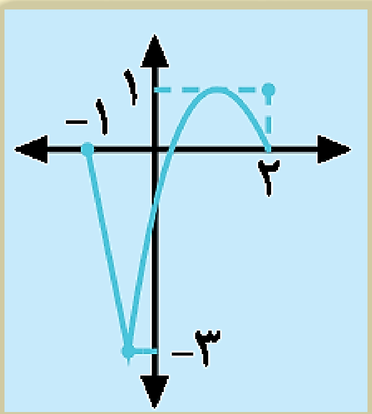
نیم نگاهی به دو نمودار زیر بیاندازید:





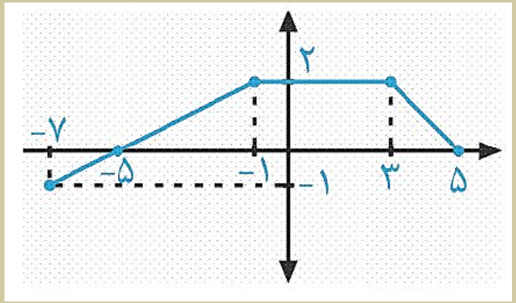
نکته: اگر $k < 0$ ، اول بدون توجه به علامتش انقباض یا انبساط افقی رو بزن، بعد نمودارو نسبت به محور yها قرینه کن!

مثال: نمودار تابع g داده شده است. به کمک آن نمودار $2g(-\frac{x}{2})$ را رسم کنید.



answer

مثال) (مثال کتاب درسی) اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x)=f(۲x+۱)$ را به کمک آن رسم کنید.



answer

توابع چندجمله‌ای

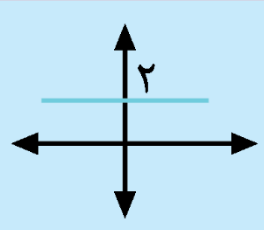
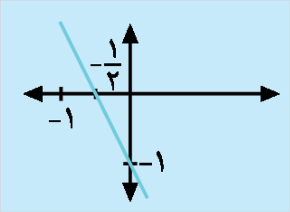
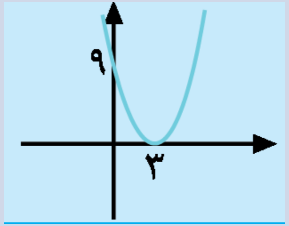
هر تابع به صورت $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ که در آن ضرایب (a_i ها) از جنس اعداد حقیقی و

توان‌ها از جنس اعداد حسابی‌اند و $a_n \neq 0$

دامنه این توابع $\mathbb{R}$ است و بزرگترین توان در آن‌ها، درجه‌شان را مشخص می‌کند. مثلا $y=4$ یک چندجمله‌ای از

درجه صفر و $y=\sqrt{2}x^3-1$ یک چند جمله از درجه ۳ است.

حالات خاص توابع چند جمله‌ای را در جدول زیر ببینید : (مثال کتاب)

درجه تابع	۰	۱	۲
نام تابع	ثابت	خطی	درجه ۲
ضابطه کلی	$f(x)=b\ ;\ b\in\mathbb{R}$	$f(x)=ax+b\ ;\ a\neq ۰$	$f(x)=ax^{۲}+bx+c\ ;\ \ a\neq ۰$
مثال			

مثال (فعالیت)الف) نمودار تابع $f(x)=x^{3}$ را از طریق نقطه‌یابی رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

ب) به کمک نمودار رسم شده برای تابع $f(x)=x^{3}$ ، نشان دهید f وارون‌پذیر است.

پ) نمودار f^{-1} و ضابطه آن را به دست آورید.

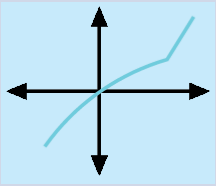
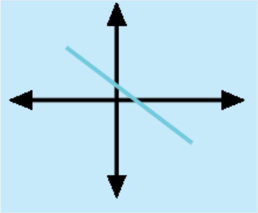
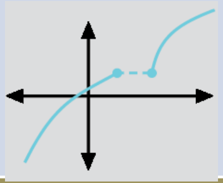
answer

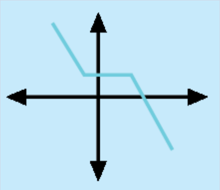
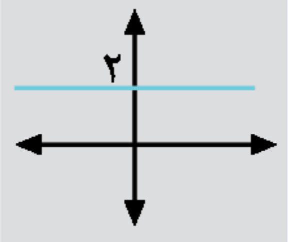
مثال) (کار در کلاس کتاب) نمودار تابع $y = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x$ را به کمک نمودار تابع $y = x^۳$ رسم کنید.

answer

توابع صعودی و توابع نزولی

صفر تا صد داستان، انتظارتان را می‌کشد!

مثال	تعریف ریاضی	تعریف فارسی	نوع تابع
	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$	با افزایش x، مقدار y افزایش می‌یابد.	اکیداً صعودی
	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$	با افزایش x، مقدار y کاهش می‌یابد.	اکیداً نزولی
	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$	با افزایش x، مقدار y زیاد می‌شود یا ثابت می‌ماند.	صعودی

نوع تابع	تعریف فارسی	تعریف ریاضی	مثال
نزولی	با افزایش x، مقدار y کم می‌شود یا ثابت می‌ماند.	$x_۲ > x_۱ \Leftrightarrow f(x_۲) \le f(x_۱)$	
ثابت (هم صعودی هم نزولی)	همواره مقدار yثابت است.	به ازای هر $x_۱, x_۲ \in D_f$ داریم: $f(x_۱) = f(x_۲)$	

قضیه تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها

رابطه تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $p(x)$ (درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر است) به صورت

$f(x)=p(x).q(x)+r(x)$ است که در آن درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است.

توجه: اگر $r(x)=0$ ، آنگاه چندجمله‌ای **f** بر چندجمله‌ای **p** بخش‌پذیر است و بالعکس.

قضیه: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ عبارت است از $r(x)=f(-\frac{b}{a})$

مثال) (کار در کلاس) باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $x^3 + x - 2$ را بر $2x + 1$ به دست آورید.

answer

آشنایی با ۳ اتحاد چقر و بَدبَدَن!!

۱- برای nهای زوج و فرد داریم : $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-1})$

مثال) (فعالیت کتاب) چندجمله‌ای‌های $x^5 - 1$ و $x^6 - 64$ را تجزیه کنید.

answer

۲- برای nهای فرد، با تبدیل $a \to -a$ داریم: $x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})$

مثال) (کار در کلاس) چندجمله‌ای $x^5 + 1$ را تجزیه کنید.

answer

۳- برای nهای زوج ، با تبدیل $a \to -a$ داریم: $x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots - a^{n-1})$

مثال) (کار در کلاس) چند جمله‌ای $x^4 - 16$ را طوری تجزیه کنید که یک عامل آن باشد.

answer

۱- (تمرین کتاب) توابع زیر، تبدیل یافته‌ی تابع $y=\sqrt{x}$ هستند. هریک از آن‌ها را به نمودارش نظیر کنید.

الف) $y=\sqrt{۲+x}$

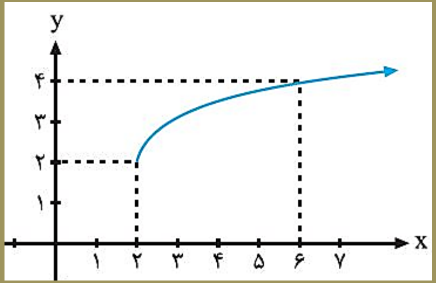
ب) $y=۲+\sqrt{x}$

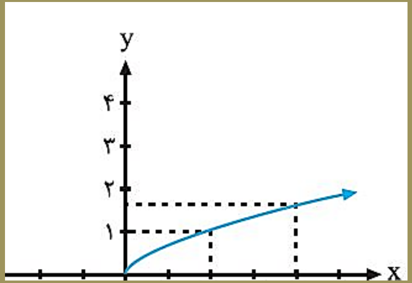
پ) $y=-۲\sqrt{x}$

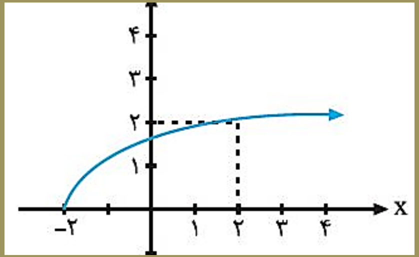
ت) $y=\sqrt{\frac{x}{۲}}$

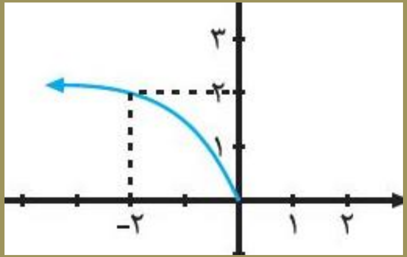
ث) $y=۲+\sqrt{x-۲}$

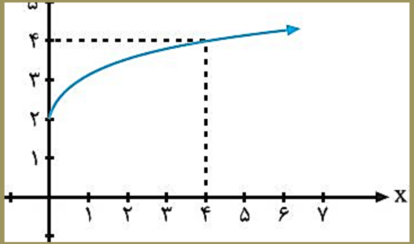
ج) $y=\sqrt{-۲x}$

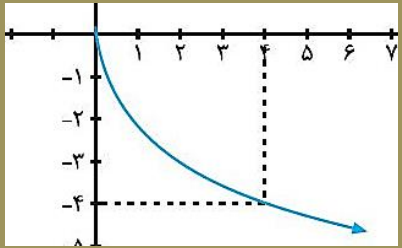








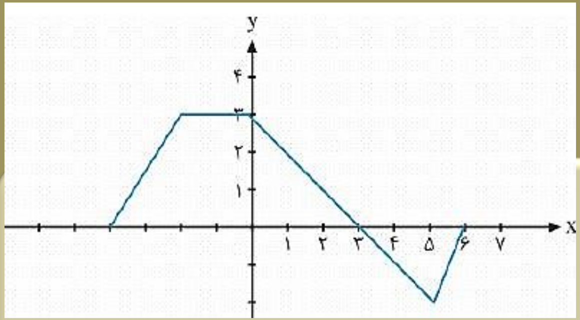




۲- (تمرین کتاب) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

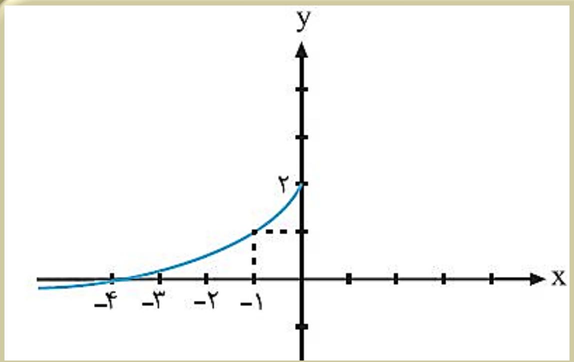
الف) $y = ۲f(x-۱)$

ب) $y = f(۲x-۱)$



answer

۳- (تمرین کتاب) نمودار تابع زیر فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطه‌ی این تابع را بنویسید.



answer

۴- (تمرین کتاب) تابع $f(x)=(x-۲)^۳+۱$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع **f** را به کمک نمودار تابع $y=x^۳$ رسم کنید.

ب) نشان دهید که **f** وارون‌پذیر است و نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید. پ) ضابطه‌ی $f^{-۱}$ را به دست آورید.

answer

۵- (تمرین کتاب درسی) نمودار توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آن‌ها در تمام دامنه‌ی خود اکیداً یکنواست؟

الف) $f(x)=\sqrt{۲-x}$ ب) $g(x)=۲^{-x}$

answer

۶- (تمرین کتاب) آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی و هم نزولی باشد؟

answer

۷- (تمرین کتاب) اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $x^۲ + kx + ۲$ بر $x - ۲$ برابر ۶ باشد، **k** را تعیین کنید.

answer

۸- (تمرین کتاب) مقدار **b** و **a** را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^۳ + ax^۲ + bx + ۱$ بر $x - ۲$ و $(x + ۱)$ بخش‌پذیر باشد.

answer

۹- (تمرین کتاب) هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل‌های خواسته شده تجزیه کنید.

الف) $x^{۶} - ۱$ با $x - ۱$ عامل   ب) $x^{۶} - ۱$ با $(x+۱)$ عامل   ج) $x^{۵} + ۳۲$ با $x + ۲$ عامل

answer

۱۰) اگر $\frac{۱}{۶۴} \le \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳x-۲}$ حدود x را به دست آورید.

answer

فصل ۲ :

مثلثات

(۶ نمره)

تناوب و تابع متناوب

تابع f را متناوب می‌گوییم، هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T وجود داشته باشه به طوری‌که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$.

(یعنی نمودارش هر T واحد یک بار تکرار می‌شود.) کوچکترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می‌نامیم.

توابع $\boxed{y = a\,\mathrm{Sin}\,bx + C}$ و $\boxed{y = a\,\mathrm{Cos}\,bx + C}$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + C$ و مقدار مینیمم $-|a| + C$

و دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

مثال (مثال کتاب درسی) دوره تناوب و مقادیر max و min هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = ۳\,\mathrm{Sin}(۲x) - ۲$

answer

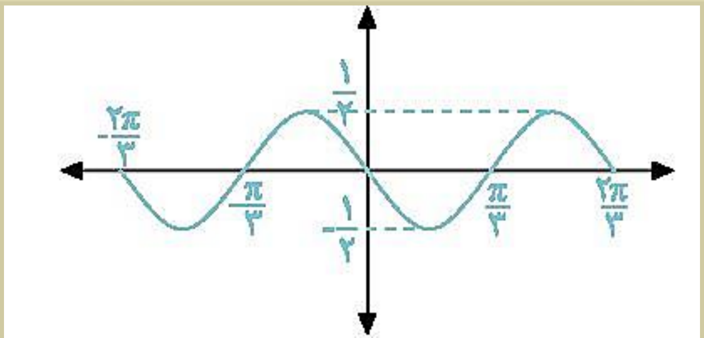
ب) $y = -\frac{۱}{۴}Cos(\pi x)$

answer

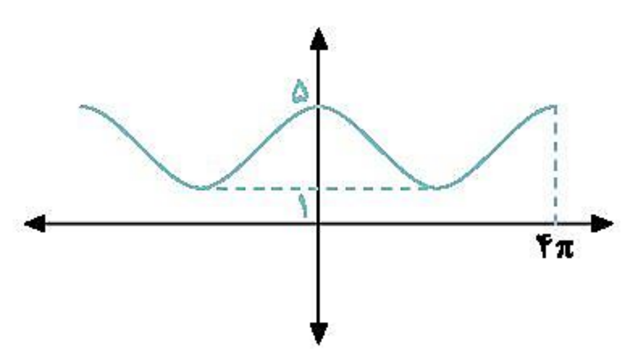
مثال (مثال کتاب) هر یک از نمودارهای زیر مربوط به $y = a\sin bx + C$ یا $y = a\cos bx + C$ است. با تشخیص $\max$ و $\min$ و دوره تناوب، ضابطه هر کدام را مشخص کنید.

answer

الف)

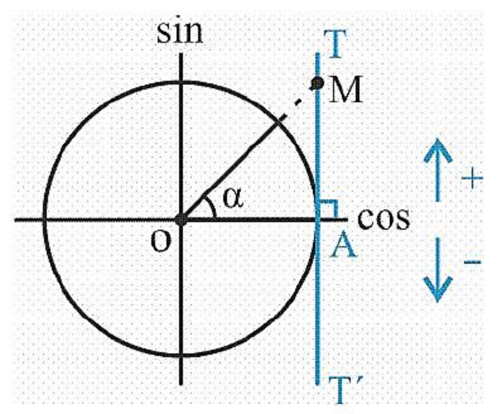


ب)



answer

تانژانت



در دایره مثلثاتی روبه‌رو، انتهای ضلع متحرک زاویه α را امتداد می‌دهیم تا محور عمودی TAT' را در نقطه **M** قطع کند. در مثلث قائم‌الزاویه **OAM** داریم:

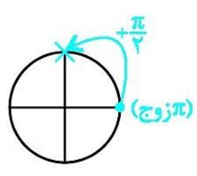
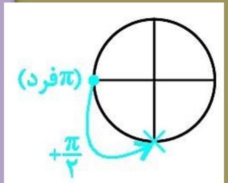
$$\tan\alpha = \frac{MA}{OA} \xrightarrow{oa=1} \boxed{\tan\alpha = MA}$$

نتیجه: محور قائم TAT' ، همان محور $\tan$ هاست (موازی $\sin$). برای به دست آوردن $\tan$ یک زاویه دلخواه، کافی است انتهای ضلع متحرک آن زاویه را امتداد دهید تا محور $\tan$ ها را قطع کند!

تغییرات tan

قبل از هر چیزی عرض کنم که $\tan x$ در مقادیری که مخرجش صفر است (یعنی $\operatorname{Cos} x = ۰$) تعریف نمی‌شود

($x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$ که $k \in \mathbb{Z}$). اگر به k اعداد زوج بدهیم،

این مقادیر در بالای دایره مثلثاتی قرار می‌گیرند  و اگر k فرد باشد، در پایین دایره قرار می‌گیرند. 

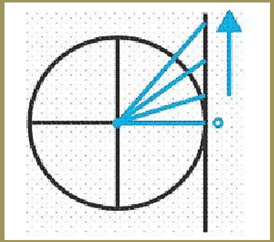
لازم به ذکر است که این نقاط مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ هستند $\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۲}, \ldots$ و هنگام رسم نمودار، در این طول‌ها،

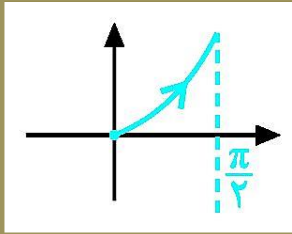
یک خط چین قائم رسم می‌کنیم. (x که به این نقاط میل می‌کنه، $\tan x$ تشریفشو می‌بره ∞) . خب! با این

مقدمات برویم سراغ بررسی داداش تانژانت در نواحی مختلف و رسم نمودارش!

۱- ناحیه اول : در شروع این ربع مقدار tan صفر می‌شود. هر چه مقدارزاویه بیشتر شود، مقدار tan زاویه هم

بیشتر می‌شود تا به $+\infty$ میل کند. نمودارش را ببینید $\Leftarrow$

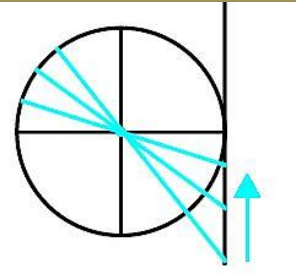


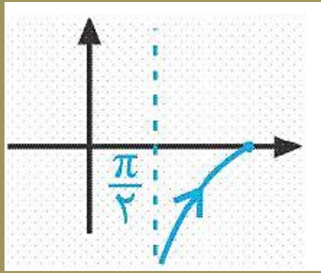


نتیجه : در ربع اول، تابع tan x یک تابع صعودی است. (البته صعودی اکیدا!)

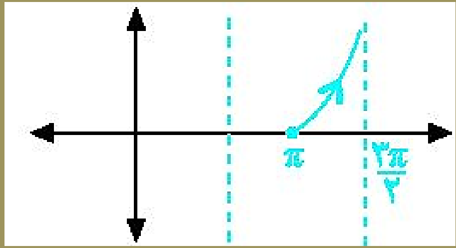
۲- ناحیه دوم : در شروع این بازه، مقدار tan x ، $-\infty$ است. (منفی بی‌نهایت چون در ربع دوم tan x منفی است)

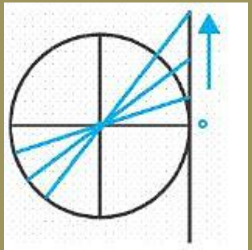
هر چه مقدار کمان بیشتر می‌شود، tan x این کمان هم زیادتر می‌شود تا اینکه بشود صفر. این هم نمودارش $\Leftarrow$





نتیجه: در ربع دوم هم تابع $\tan x$ تابعی صعودی اکید است.

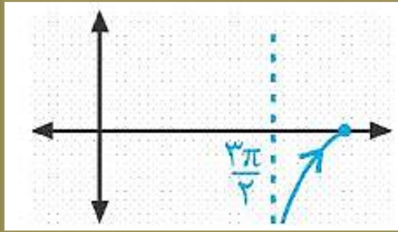


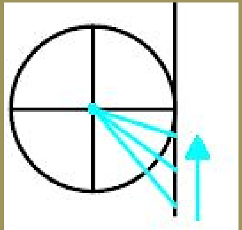


۳- ناحیه سوم: در شروع این بازه مقدار $\tan$ ، صفر است و رفته رفته

به میل $+\infty$ می‌کند. این هم نمودارش $\Leftarrow$

نتیجه: در ربع سوم هم $\tan x$ تابعی صعودی اکید است.





۴- ناحیه چهارم: در شروع این بازه مقدار $\tan$ ، $-\infty$ است. رفته رفته

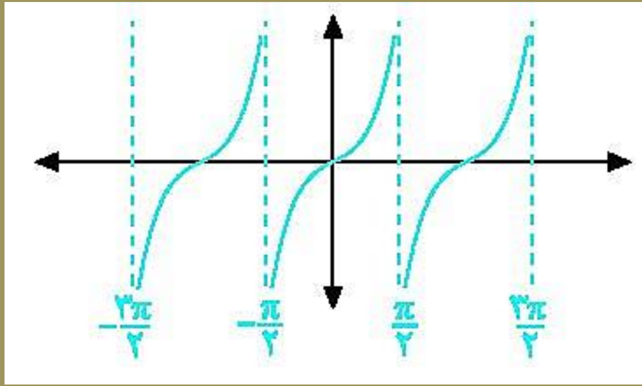
زیاد و زیادتر می‌شود تا اینکه به صفر برسد. این هم نمودارش $\Leftarrow$

نتیجه: در ربع چهارم هم تابع $\tan x$ صعودی اکید است.

تابع tan

این تابع به ازای هر زاویه دلخواه در دایره (به‌جز $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ که $k \in \mathbb{Z}$) تعریف شده است. پس دامنه آن می‌شود $\Leftarrow$ $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

اگر تکه‌هایی از نمودار tan را که برایتان رسم کردم، به هم بچسبانید، به نمودار کلی tan می‌رسید:



ویژگی‌هایی از تابع که از نمودار قبل برداشت می‌شوند:

۱- این تابع متناوب است با دوره تناوب π . به طور کلی دوره تناوب تابع $y = A\tan(ax) + B$ می‌شود: $T = \frac{\pi}{|a|}$

۲- این تابع در کل دامنه‌اش غیر یکنواست.

۳- این تابع در بازه‌هایی که ریشه مخرجش در آن بازه نباشد (یعنی بازه‌ها بین دو خطچین باشه و خطچینی تو بازه نباشه) صعودی اکید است.

نسبت‌های مثلثاتی زاوایای دو برابر کمان

در محاسبات فنی‌ای که جلوتر به آن برخورد خواهیم کرد (معادلات مثلثاتی) به ۴ فرمول زیر نیاز داریم:

$$\mathrm{Sin}\,۲\alpha = ۲\,\mathrm{Sin}\,\alpha.\mathrm{Cos}\,\alpha$$

$$\mathrm{Cos}\,۲\alpha \begin{cases} \longrightarrow = \mathrm{Cos}^{۲}\alpha - \mathrm{Sin}^{۲}\alpha \\ \longrightarrow = ۲\,\mathrm{Cos}^{۲}\alpha - ۱ \\ \longrightarrow = ۱ - ۲\,\mathrm{Sin}^{۲}\alpha \end{cases}$$

مثال: (مثال کتاب) مقدار $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ را بیابید.

answer

معادلات مثلثاتی

معادلاتی‌اند که مجهول در آن‌ها، کمان نسبت‌های مثلثاتی است. مثلاً $\sin x = ۱$ یک معادله مثلثاتی است و منظور از حل آن یعنی یافتن کمان‌هایی که سینوس آن‌ها برابر یک می‌شود. در کتاب شما، خوشبختانه طراحان دل‌رحمی به خرج داده‌اند و فقط ۲ مدل از این معادلات را زیر ذره‌بین برده‌اند! (خدایشان خیر دهاد!!)

مدل ۱: معادلات سینوسی به فرم $\sin x = \sin\alpha$ که جوابش می‌شود $x = ۲k\pi + \alpha$ و $x = (۲k+۱)\pi - \alpha$ که $k \in \mathbb{Z}$

مثال: (کار در کلاس کتاب) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰$

answer

نکته: اگر $\sin$ مساوی یک عدد منفی شد کاری به منفی نداشته باشید، زاویه α را به‌دست بیاورید بعد منفی را ببرید داخل

ب) $۴\sin x + \sqrt{۸} = ۰$

answer

مدل ۲: معادلات کسینوسی به فرم $\operatorname{Cos} x = \operatorname{Cos} \alpha$ که جوابش می‌شود $x = ۲k\pi \pm \alpha$ که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: (مثال کتاب) معادله $\operatorname{Cos} x(۲\operatorname{Cos} x - ۹) = ۵$ را حل کنید.

answer

نکته: اگر $\cos$ مساوی یک عدد منفی شد، کاری به منفی نداشته باشید و زاویه α را بیابید.
در نهایت جلوی $\cos$ بنویسید. $\pi-\alpha$

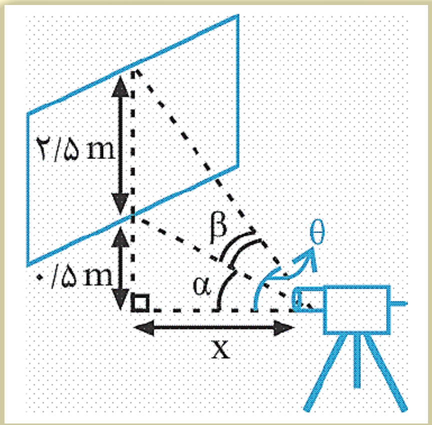
$$ex)\ \cos(2x)=-\frac{1}{2}$$

مدل ۳: معادلات تانژانتی به فرم $\tan x=\tan\alpha$ که جوابشان برابر است با $x=k\pi+\alpha$ که $k\in\mathbb{Z}$.

مثال : معادله $\tan x=\tan 5x$ را حل کنید.

answer

مثال) (مثال کتاب) نشان دهید در شکل روبه‌رو، رابطه بین زاویه دید دوربین(β) با فاصله افقی آن تا تابلو نقاشی، به صورت $\tan\beta=\dfrac{۲-۵x}{x^{۲}+۱/۵}$ است. سپس زاویه دید را در حالتی که فاصله افقی برابر یک متر است به دست آورید.



answer

نکته: اگر tan مساوی یک عدد منفی شد کاری به منفی نداشته باشید، زاویه α را به‌دست بیاورید بعد منفی را ببرید داخل

مثال: معادله مثلثاتی $\tan^{2} x + 2\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای چند جواب است؟

answer

نکته: اگر $\cos$ مساوی یک عدد منفی شد، کاری به منفی نداشته باشید و زاویه α را بیابید.

در نهایت جلوی $\cos$ بنویسید. $\pi-\alpha$

$ex)\ \cos(۲x)=-\frac{۱}{۲}$

۱- (تمرین کتاب) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y=-\pi\sin(\frac{x}{۲})-۲$

answer

ب) $y = -\frac{۳}{۴}\cos ۳x$

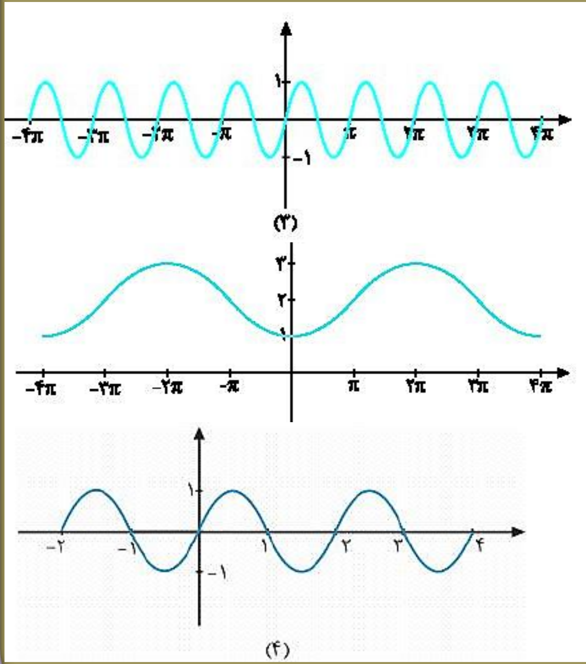
answer

۲- (تمرین کتاب) هر یک از توابع داده شده را به نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin \pi x$

ب) $y = ۲ - \cos \frac{۱}{۲} x$

پ) $y = \sin ۲x$



answer

۳- (تمرین کتاب) در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف) $T = \pi \quad , \quad \max = ۳ \quad , \quad \min = -۳$

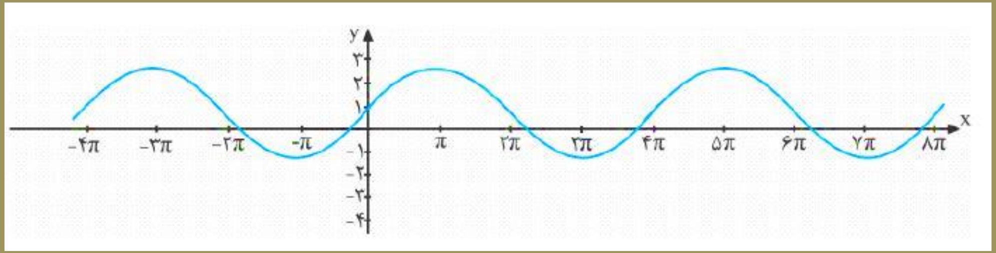
answer

ب) $T = ۳$, $max = ۹$, $min = ۳$

answer

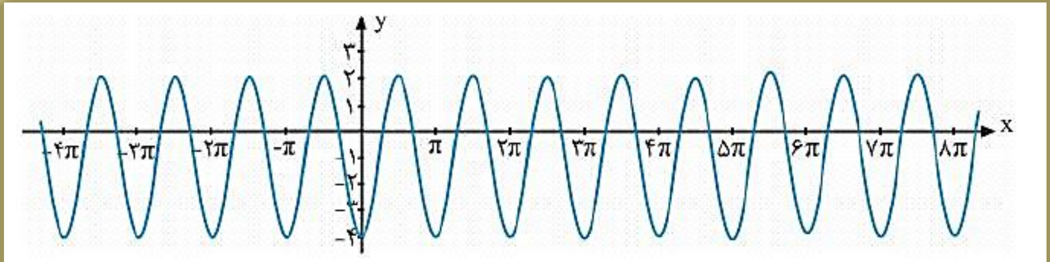
۴- (تمرین کتاب) ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

الف)



answer

ب)



answer

۵- (تمرین کتاب) کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد.

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

answer

۶- (تمرین کتاب) با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

answer

ب) $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$

answer

۷- (تمرین کتاب) فرض کنید $\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\cos ۲\alpha$ ب) $\sin ۲\alpha$

answer

۸- نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

answer

۹- (تمرین کتاب) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{۲} = \sin ۳x$

answer

ب) $\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$

answer

پ) $\cos x = \cos ۲x$

answer

ت) $\cos ۲x - \sin x + ۱ = ۱$

answer

ث) $\cos^{۲} x - \sin x = \frac{۱}{۴}$

answer

ج) $\tan(٢x - ١) = ٠$

answer

ج) $\tan ۳x = \tan(\pi x)$

answer

۱۰- (تمرین کتاب) مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

answer

فصل ۳ :

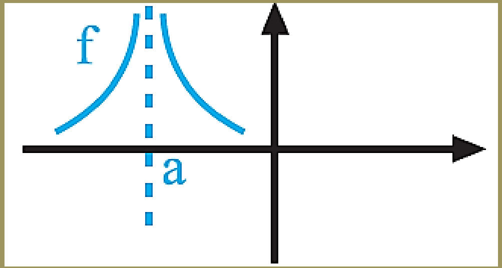
حد

(۷ نمره)

حد نامتناهی

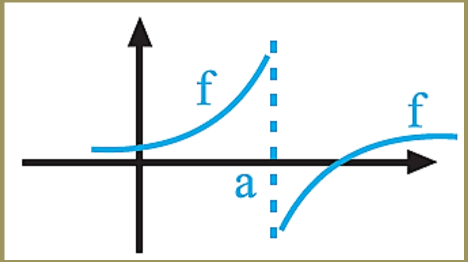
خلاصه و دیقه نودی عرض کنم! گاهی وقتی $x \to a$ ($x \to a^+$ یا $x \to a^-$) میل کند، مقدار تابع به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند! عنایتی به نمودارهای زیر داشته باشید رفقا!

الف)



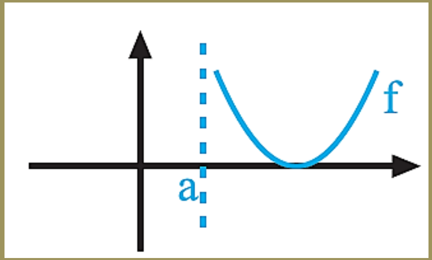
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$$

ب)



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty \end{cases}$$

ج)



$$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

مثال: (مثال کتاب) نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x-2}$ را رسم کنید و به وسیله آن، حد چپ و راست این تابع را در $x=2$ بیابید.

answer

نکته: حواست باشه که برای تعیین علامت صفر مخرج، گاهی لازم است مخرج را تعیین علامت کنیم.

قضیه ۳: عدد به روی صفر بی‌نهایت میشود! اما...

، ، ،

مثال) (مثال کتاب) حاصل $\lim\limits_{x \to ۰^{+}} \dfrac{x-۱}{\sin x}$ را به دست آورید.

answer

مثال) (مثال کتاب) حاصل $\lim\limits_{x \to ۲^-} \frac{x+۱}{۴-x^۲}$ را به دست آورید.

answer

مثال) (مثال کتاب) حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} \dfrac{x^۲+x}{x^۲+۲x+۱}$ را به دست آورید.

answer

قضیه ۴: آقا عدد به روی بی‌نهایت می‌شه صفر! خلاص!

مثال) (مثال کتاب) حاصل $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{(x+۱)}{\tan x}$ را به دست آورید.

answer

مثال) (مثال کتاب) حاصل $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x+\sin^2 x}{x^2}$ را به دست آورید.

answer

مثال) (کار در کلاس) حاصل حدود زیر را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۱^-} \frac{x+۱}{x-۱} = ?$

answer

ب) $\lim_{x \to ۰^+} (\frac{x^۲ + x}{x^۲}) = ?$

answer

پ) $\lim_{x \to (-۲)^+} \frac{x+۲}{(x^۲+۴x+۴)} = ?$

answer

ت) $\lim\limits_{x \to ۰^-} \frac{۲ - \cos ۲x}{x} = ?$

answer

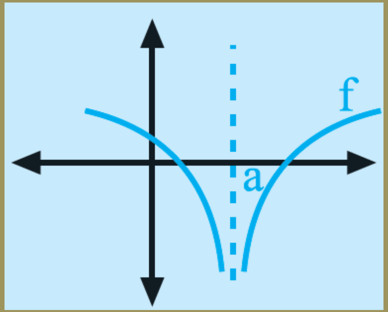
مجانب قائم

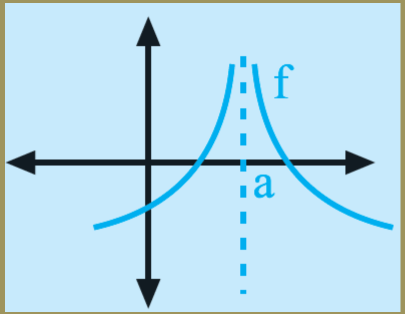
خطچین قائم $x = a$ را مجانب قائم تابع $f(x)$ می‌گویند، وقتی تابع **f** از دو طرف $x = a$ ($x \to a$) یا فقط از یک طرف ($x \to a^+$ یا $x \to a^-$) به بی‌نهایت میل کند.

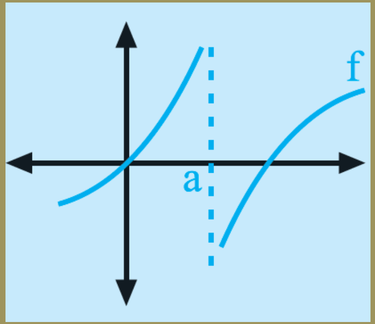
اصلا هول نکن رفیق! وقتی بهت گفتن آیا خط مجانب قائم **f** هست یا نه، کافیه حد **f** رو در **a** حساب کنی.

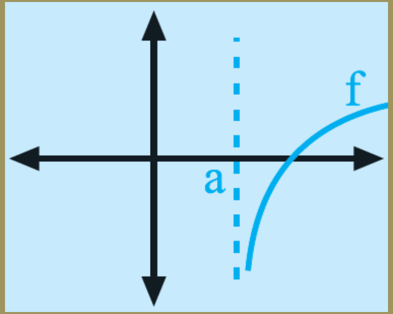
(حالا $x \to a$ یا $x \to a^+$ یا $x \to a^-$ فرق نداره) اگر حد **f** حداقل در یک طرف ، بی‌نهایت شد، یعنی مجانب قائم تابع **f** است.

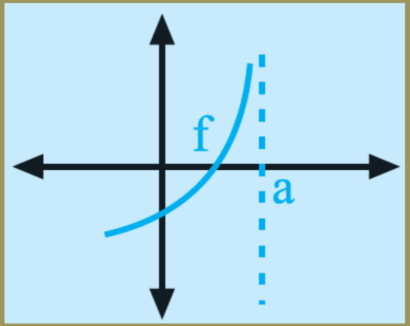
مثال) (مثال خوب کتاب) در هر کدام از شکل‌های زیر، $\mathbf{x = a}$ یک مجانب قائم منحنی داده شده است.











مثال) (مثال کتاب) کدام یک از خطوط $x=-۱$ و $x=۳$ مجانب‌های قائم $f(x)=\dfrac{x^۲-۴x+۳}{x^۲-۲x-۳}$ می‌باشند.

answer

مثال) (مثال کتاب) نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می‌باشد؟

answer

مثال) (کار در کلاس با شیطنت من!) مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\frac{x^{۲}+x-۲}{x^{۲}-x-۶}$ را بیابید.

ریشه‌های مخرج توابع کسری، معمولا مجانب قائم‌اند. گفتیم معمولا! چون بعد از محاسبه این ریشه‌ها، باید حد تابع را در آن‌ها بیابید تا مطمئن شوید جواب حد میشود بی‌نهایت!!

answer

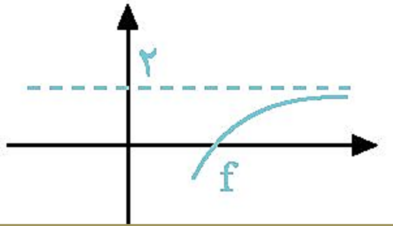
حد در بی‌نهایت

خلاصه عرض کنم، گاهی x به $+\infty$ (انتهای راست محور xها) و یا به $-\infty$ (انتهای چپ محور xها) میل می‌کند. در این حالت باید ببینیم f (همان عرض تابع) به چه عددی میل خواهد کرد.

به نمودارهای زیر دقت کنید:

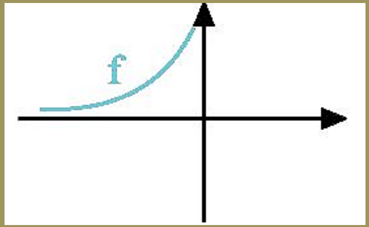
الف)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ۲$$



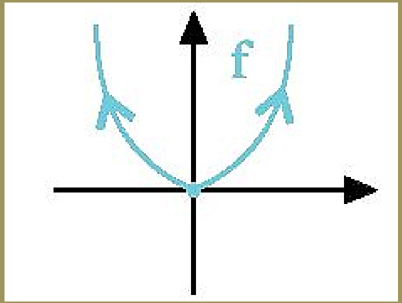
ب)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ۰$$



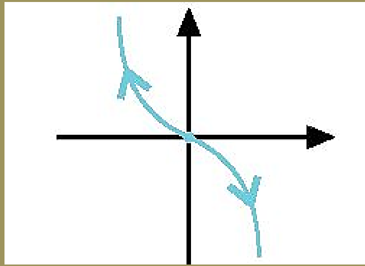
ج)

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$



د)

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$



نکته : عدد(غیر صفر) به روی ∞ می‌شود صفر !

هم‌ارزی پرتوان (مهم): اگر $x \to \pm\infty$ ، هر چند جمله‌ای، هم‌ارز (یعنی هم‌ارزش و معادل) جمله‌ای است که بیشترین توان را داراست.

$$-۳x^{۳} - ۴x + ۱ \sim -۳x^{۳} \qquad ۴x^{۲} - ۲x^{۱۰} + ۴ \underset{x\to-\infty}{\sim} -۲x^{۱۰}$$

مثال: (کار در کلاس) مقدار حدود زیر را مشخص کنید.

الف)

answer

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۱ - ۵t^{۲}}{t^{۲} + ۳t}$$

ب)

answer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{۲ - ۳x}$$

مثال: (کار در کلاس کتاب) حدود زیر را محاسبه کنید.

الف)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+7x^3-2x-9}{3x^2-8x+1}$$

ب)

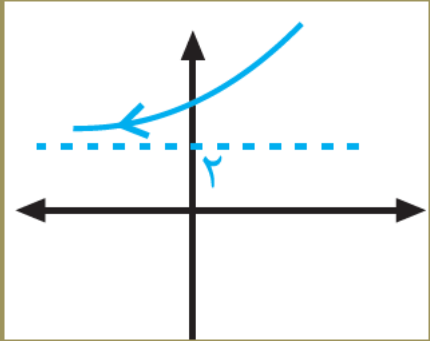
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x+4}{x^3+x-8}$$

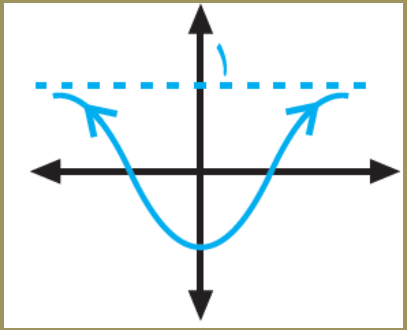
ج)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9}$$

مجانب افقی

خط $y=\ell$ را مجانب افقی نمودار تابع $y=f(x)$ می‌نامیم، به شرطی که حد f در ∞ (فرقی نمی‌کنه $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ یا هر دو) بشود ℓ . در واقع مقدار تابع f (عرض f) در بی‌نهایت به عرض ℓ میل می‌کند. ۲ نمودار زیر را ببینید.



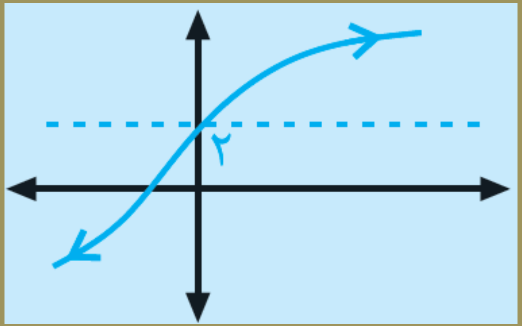


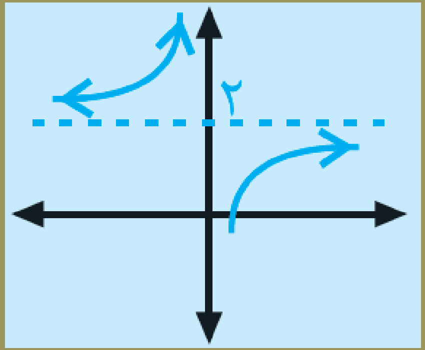
نکته: باز هم هول نشیدا هر وقت گفتن خطوط مجانب افقی تابع f را به دست آورید، کافی است $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ را محاسبه کنید. اگر جوابش عدد ℓ شد، $y=\ell$ می‌شود معادله مجانب افقی f.

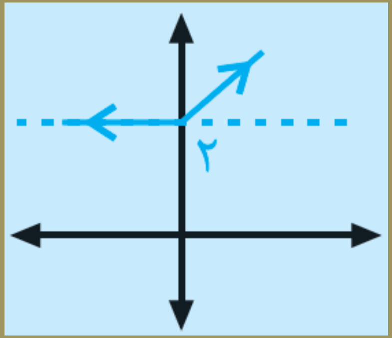
مثال) (مثال کتاب) مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ را به دست آورید.

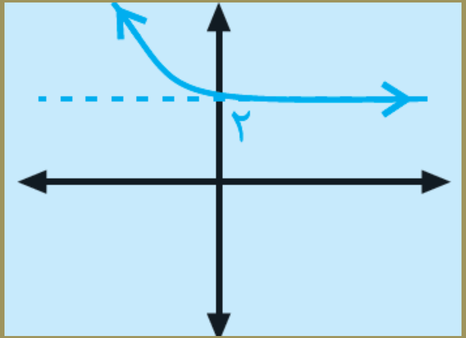
answer

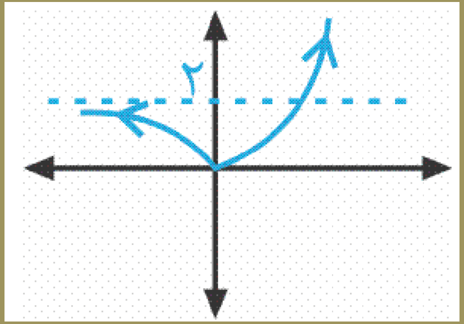
مثال) (کار در کلاس کتاب) کدام یک از نمودارهای توابع زیر مجانب افقی دارند؟











۱- حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{-۱}{|x|}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{۱}{x-۱}$

ت) $\lim\limits_{x\to -۶} \frac{۹}{(x+۶)^۲}$

ث)

$$\lim_{x \to ۳^+} \frac{۱ - ۵x}{x^۲ - ۹}$$

ج)

$$\lim_{x \to (-۲)^-} \frac{-۳x}{x^۲ - ۴}$$

چ)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{۱}{\cos x}$$

ح)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{٢}^{-}} \tan x$$

خ)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{٢}^{+}} \tan x$$

د)

$$\lim_{x\to ٣^{-}} \frac{[x]-٣}{x-٣}$$

۲- (تمرین کتاب) نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه‌ی آن $[-۲,۲]-\{۱\}$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.

answer

۳- مجانب قائم‌های تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

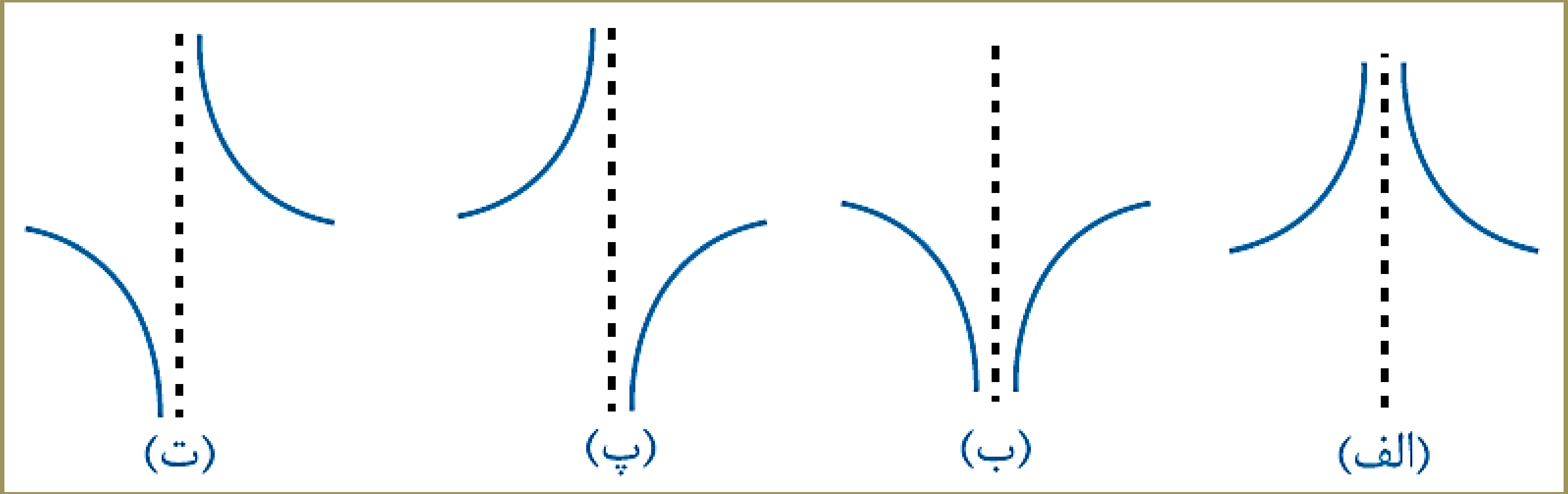
$$g(x) = \frac{x^{2} + x}{x^{2} - x}$$

answer

۴- (تمرین کتاب) نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x-|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

answer

۵- (تمرین کتاب) کدام شکل وضعیت نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x^{۲}-۲x+۱}$ را در همسایگی $x=۱$ نشان می‌دهد؟ چرا؟



۶- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{۲x-۳}$$

ب)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳+\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۴}{x}-۵}$$

پ)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^۲-۳x+۱}{x^۲+۲x-۳}$$

ت)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^۵-۶x^۳-x}{x^۲-۵x+۱}$$

۷- (تمرین کتاب) مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید:

الف) $y = \frac{۲x - ۱}{x - ۳}$

answer

ب) $y = \dfrac{x}{x^{۲} - ۴}$

answer

پ) $y = \frac{۱+۲x^{۲}}{۱-x^{۲}}$

answer

ت) $y = \frac{٢x}{١ + x^{٢}}$

answer

۸- نمودار تابع f به شکل زیر است. حدود خواسته شده را بنویسید.

الف) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

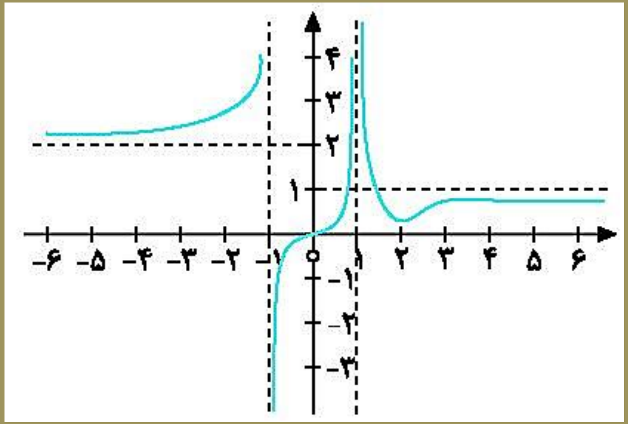
ب) $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x)$

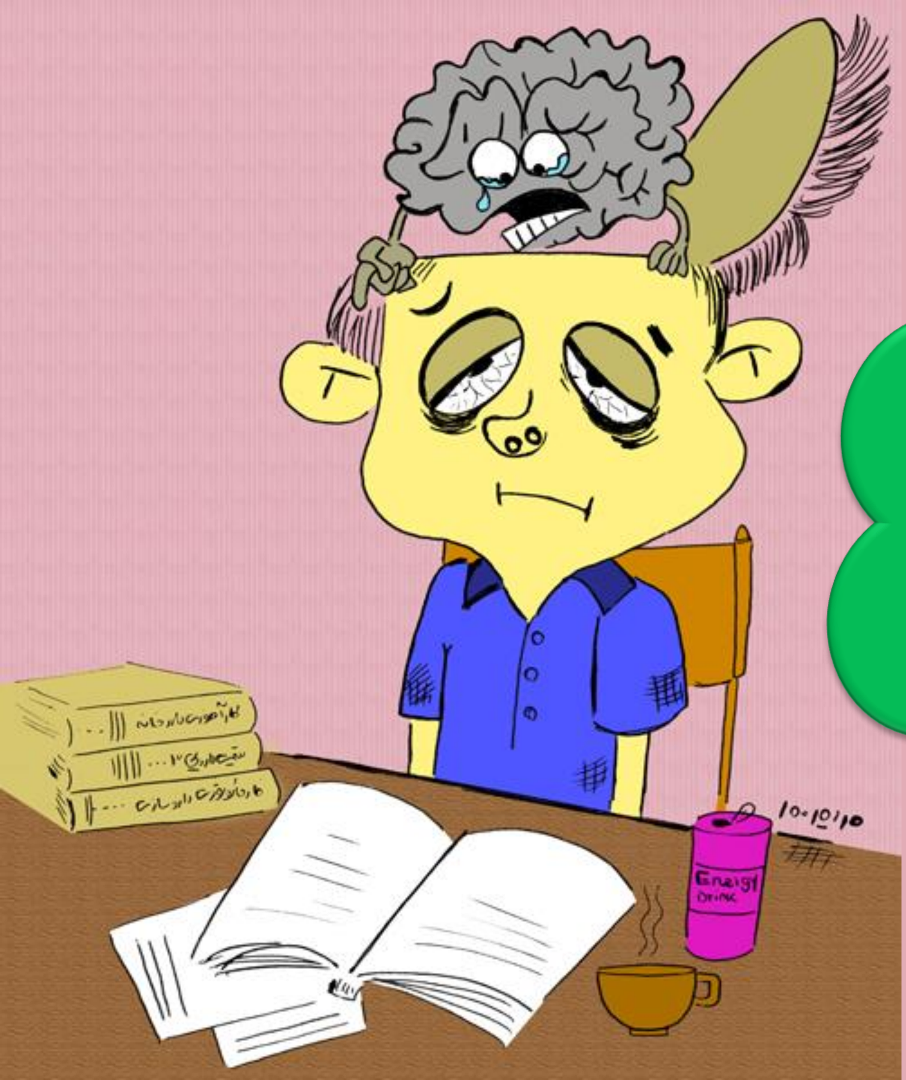
پ) $\lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$



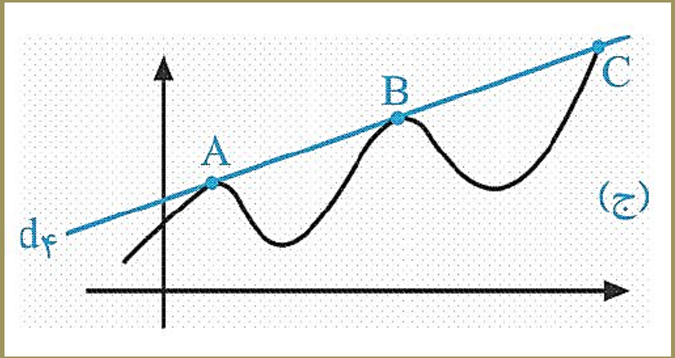


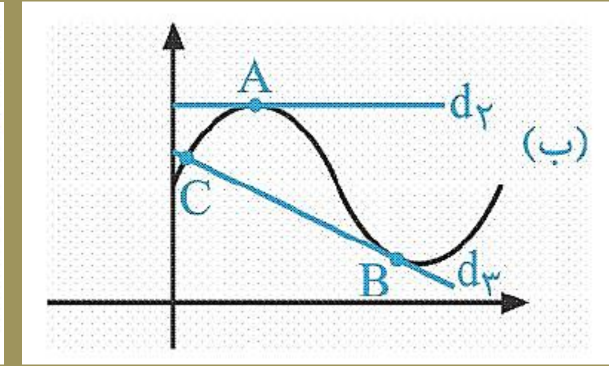
فصل ۴ :

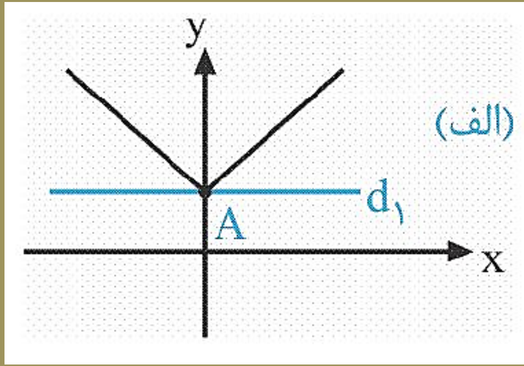
مشتق

خط مماس بر یک منحنی به روایت تصویر!

به سه شکل زیر دقت کنید. در شکل الف، خط d_1 بر منحنی در A مماس نیست. در شکل ب، خط d_2 در A و خط d_3 در B بر منحنی مماس است. در همین شکل اما، خط d_3 در C بر منحنی مماس نیست، متقاطعند! در شکل ج، خط d_4 در نقاط A و B بر منحنی مماس است. اما در C مماس نیست، متقاطعند!







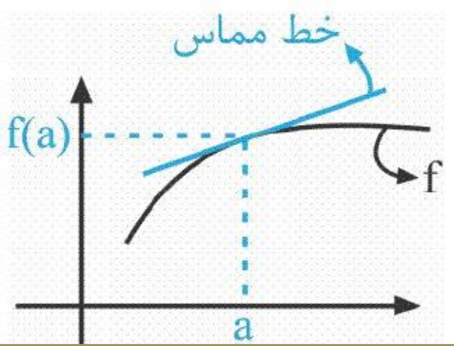
مشتق تابع f در نقطه $A(a,f(a))$

مشتق تابع **f** در نقطه $x=a$ را با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهند، که برابر است با:

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)}$$

نکته: زمانی f' در $x=a$ تعریف می‌شود که حد فوق موجود و متناهی باشد.

نکته: مشتق تابع **f** در $x=a$ برابر است با:



<u>شیب خط مماس بر نمودار **f** در نقطه **A**</u>

مثال: (مثال کتاب) معادله خط مماس بر منحنی $y = -x^{۲} + ۱۰x$ را در نقطه‌ای به طول $x = ۲$ واقع بر منحنی بیابید.

answer

تعریف دیگر برای مشتق f در $x = a$

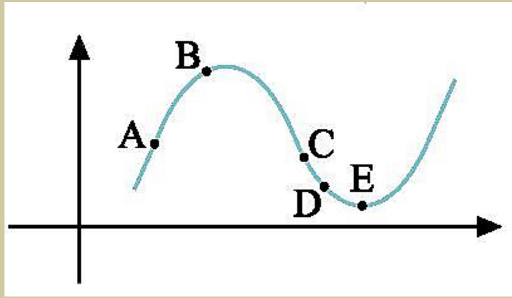
می‌شود: $\Leftarrow$ $\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$

در صورتی که حد گفته شده موجود و متناهی باشد، مشتق **f** در **a** وجود خواهد داشت.

نکته: هیچ تفاوتی بین ۲ تعریف گفته شده وجود ندارد و استفاده از هر کدام، دلخواه است.

نکته: علامت مشتق (یا همان شیب خط مماس) با وضعیت یکنوایی تابع، به این صورت در ارتباط است که اگر در نقطه داده شده، تابع در حال صعود بود، $f' > 0$ ، اگر در حال نزول بود $f' < 0$ و اگر در نوک قله یا قعر نمودار بود، مقدار f' برابر صفر است.

مثال: فرض کنید شیب نقاط مشخص شده در منحنی زیر، ۵- ، ۱- ، ۰ ، ۲ ، ۴ هستند. مشخص کنید کدام شیب مربوط به کدام نقطه است؟



answer

مشتق چپ و راست f در $x=a$

مشتق چپ و راست تابع **f** در $x=a$ را با نمادهای $f'_{-}(a)$ و $f'_{+}(a)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_{+}(a) = \lim_{x\to a^{+}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad f'_{-}(a) = \lim_{x\to a^{-}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

شروط مشتق‌پذیری f در $x=a$

مشتق‌پزیری **f** در $x=a$ ، ۲ شرط لازم دارد:

۱- **f** در $x=a$ پیوسته باشد.

۲- شیب نیم‌مماس‌های چپ و راست برابر باشند. یعنی $f'_{-}(a)=f'_{+}(a)$

مثال: (مثال کتاب) مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\left|x^{۲}-۱\right|$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

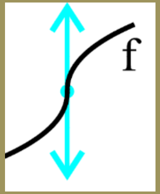
answer

مثال: (مثال کتاب) مشتق‌پذیری توابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=\sqrt{x}$ را در صفر بررسی کنید.

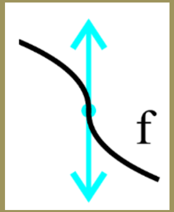
answer

مماس قائم

اگر f در $x=a$ پیوسته باشد و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ شوند، f در a مشتق‌پذیر نیست، اما خط مماس در این نقطه موجود است، که به آن مماس قائم می‌گویند.



$f'_-(a)=f'_+(a)=+\infty$ (مثبت شد چون صعودی است)



$f'_-(a)=f'_+(a)=-\infty$ (منفی شد چون نزولی است)

مثال: (مثال کتاب) آیا تابع $y = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ دارای خط مماس است؟

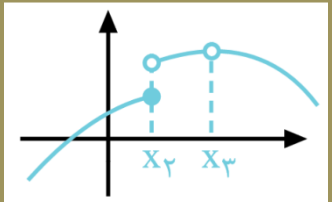
answer

مثال: آیا تابع $y = \sqrt[3]{x^2}$ در $x = 0$ دارای خط مماس است؟

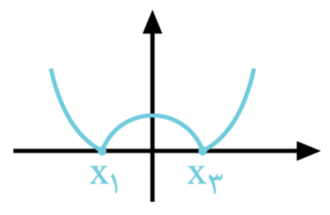
answer

در نمودار یک تابع، نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق‌ناپذیر است عبارتند از:

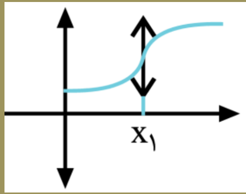
۱- نقاط ناپیوستگی: مثلا نقاط $x_۲$ و $x_۳$ در نمودار مقابل ⇐



۲- نقاط تیزی (زاویه‌دار) : مثلا $x_۱$ و $x_۳$ در نمودار مقابل ⇐



۳- نقاطی که در آن‌ها مماس قائم تولید می‌شود: مثلا $x_۱$ در دو نمودار مقابل ⇐



تابع مشتق $(f'(x))$

برابر است با $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ مشروط بر آن که این حد موجود باشد. مجموعه تمام نقاط از دامنه **f** که f' برای آن‌ها موجود باشد را $D_{f'}$ می‌گوییم.

مثال (مثال کتاب) اگر $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x}}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. سپس $\mathbf{f'(3)}$ را بیابید.

مشتق‌گیری! (صفر تا صد)

چند فرمول مشتق‌گیری مشتی ببینیم صفا کنیم!

۱ $y=a\ (a\in\mathbb{R}) \rightarrow y'=0$

۲ $y=ax \rightarrow y'=a$

۳ $y=a\Delta^{n} \rightarrow y'=an(\Delta)^{n-1}.\Delta'$

رمز:

- نما در ضریب ضرب میشه!
- یکی از نما کم میشه!
- در مشتق پایه ضرب میشه!

ex $y=\frac{-2}{x^{4}}$

ex $y=\frac{1}{5}(-5x)^{12}$

۴ $y=f\pm g\pm\ldots \rightarrow y'=f'\pm g'\pm\ldots$

۵ $y=f.g \rightarrow y'=f'.g+g'.f$

ex $y=\frac{6}{x^{3}}-x^{2}\sqrt[3]{x}+4x$

۶ $y=\sqrt{\Delta} \rightarrow y'=\frac{\Delta'}{۲\sqrt{\Delta}}$

۷ $y=\frac{f}{g} \rightarrow y'=\frac{f'g-g'f}{g^{۲}}$

ex $y=\frac{(۲x-۱)\sqrt{x}}{x^{۳}}$

۸ $y=\frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^{۲}}$

۹ $y=\frac{۱}{U} \rightarrow y=\frac{-U'}{U^{۲}}$

ex if $f(x)=(\frac{۲x-۱}{۲+۳x})^{۲}\frac{۱}{x} \rightarrow f'(۱)=?$

مشتق تابع مرکب

بخوانید : مشتقِ داخلش در اِف پریمِ داخلش! تامام :

$$y=f(\Delta) \longrightarrow y=\Delta'.f'(\Delta)$$

اگر $f(x)=\dfrac{x^۳-۲}{۱+x^۳}$ و $g(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ ، حاصل $f'(g(x))\times g'(x)$ کدام است؟ (کنکور ۹۲)

۱) $\dfrac{۳}{x}$ ۲) $\dfrac{۳}{x^۲}$ ۳) $\dfrac{۱}{۳x}$ ۴) $\dfrac{x-۳}{x^۳}$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{-۲x}$ و $g(x)=(۲x+۱)^{۲}$ ، آنگاه مشتق تابع $gof(x)$ در $x=-۲$ را با استفاده از قاعده زنجیری به دست بیاورید.

answer

مثال: (کار در کلاس) مشتق‌های توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = (x^{۲} + ۱)^{۳}(۵x - ۱)$

ب) $g(x) = \left(\frac{-۳x - ۱}{x^{۲} + ۵}\right)^{۸}$

answer

مشتق‌پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر است هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد. همچنین تابع f روی بازه $[a,b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه در بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد، در a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

نکته (کار در کلاس) تابع f روی $[a,b)$ $((a,b])$ مشتق‌پذیر است هرگاه در (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در a مشتق راست (در b مشتق چپ) داشته باشد.

مثال : (مثال کتاب) نمودار $f(x)=\begin{cases} x^۲ & -۲\le x\le ۱ \\ x+۱ & x>۱ \end{cases}$ را رسم کنید و مشتق‌پذیری آن را روی بازه‌های

$[-۲,۱]$ ، $(۱,+\infty)$ و $[۱,۲]$ بررسی کنید.

answer

مشتق مرتبه دوم

اگر تابع مشتق، مشتق‌پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y=f(x)$ را به صورت $y''=f''(x)$ (خوانده شود ایگرگ زِگوند) می‌نویسیم و برای محاسبه آن از تابع y' مشتق می‌گیریم.

مثال: (مثال کتاب) اگر $y=3x^4+2x^2-1$ ، آنگاه تابع y' و y'' را بیابید.

answer

مثال: (مثال کتاب با تغییر) رابطه $h(t)=-5t^2+40t$ ، ارتفاع جسم $(h(t))$ را t ثانیه پس از پرتاب از سطح زمین نشان می‌دهد.

الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی $[0,2]$ را بر حسب $\frac{m}{s}$ به دست آورید.

ب) سرعت لحظه‌ای جسم در لحظه $t=2$ چقدر است؟

ج) جسم چند ثانیه پس از پرتاب، به نقطه اوج می‌رسد؟

answer

کاربردی دیگر از آهنگ تغییرات تابع: آهنگ رشد

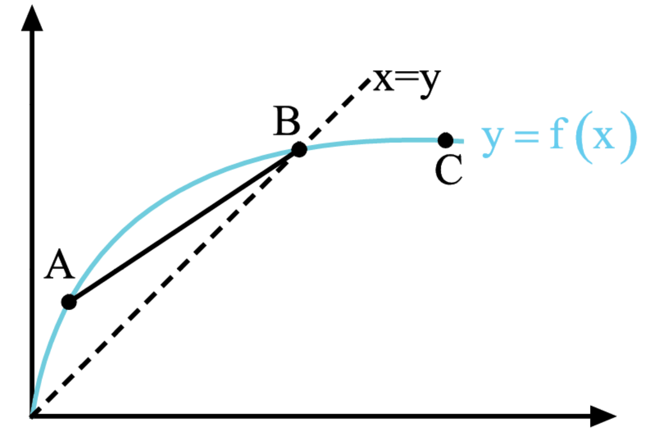
مثال: (مثال کتاب) تابع $f(x) = ۷\sqrt{x} + ۵۰$ قد متوسط کودکان را x ماه پس از تولد، بر حسب $\frac{cm}{month}$ مشخص می‌کند. آهنگ متوسط رشد یک کودک را از ۱ ماهگی تا ۳۶ ماهگی بیابید.

answer

۱- (تمرین کتاب) اگر $f(x)=۳x^۲-۲x+۱$ ، $f'(۲)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

answer

۲- (تمرین کتاب) برای نمودار $y=f(x)$ ، شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A $\leftarrow m_1$

ب) شیب نمودار در نقطه B $\leftarrow m_2$

پ) شیب نمودار در نقطه C $\leftarrow m_3$

ت) شیب خط AB $\leftarrow m_4$

ث) شیب خط $\leftarrow m_5$

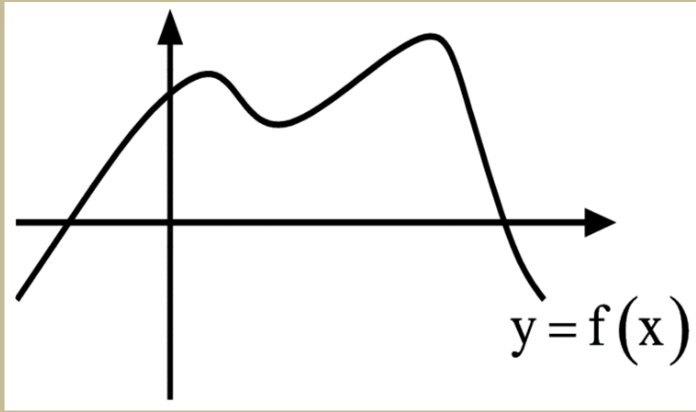
ج) شیب خط $\leftarrow m_6$

۳- (تمرین کتاب) نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و Gرا روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که:

الف) Aنقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) Bنقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) Cنقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آن‌جا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

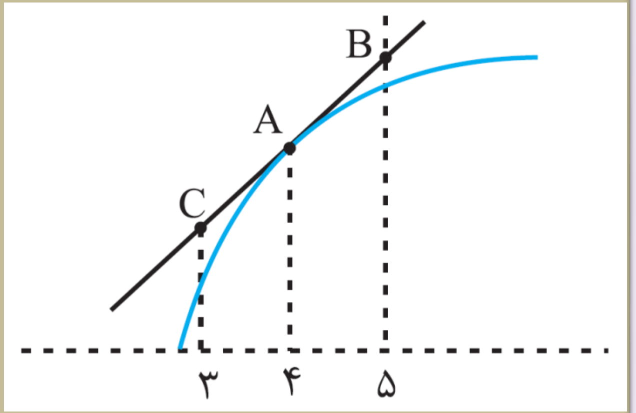


ت) Dنقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آن‌جا صفر است.

ث) نقاط E و F، نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

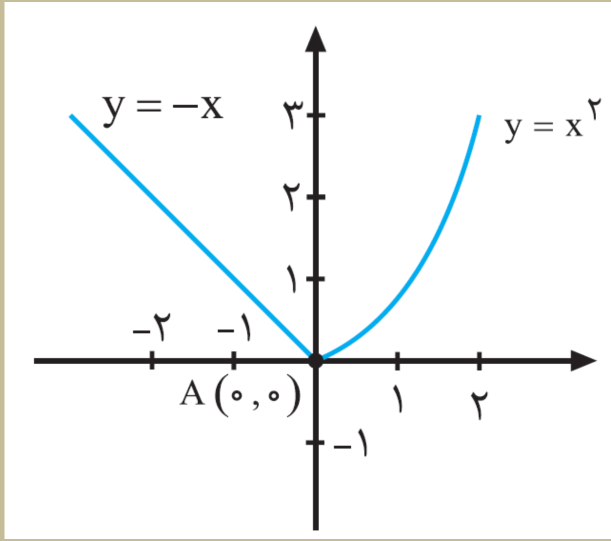
ج) Gنقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آن‌جا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

۵- (تمرین کتاب) برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(۴) = ۱/۵$ و $f(۴) = ۲۵$. با توجه به شکل، مختصات نقاط A و B و C را بیابید.



answer

۶- (تمرین کتاب) با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع داده شده در نقطه A، نشان دهید که این تابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.



answer

۸- (تمرین کتاب) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن:

الف) در یک نقطه برابر صفر شود. ب) در $x = ۲$ برابر ۳ شود. پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

ت) در تمام نقاط یکسان باشد. ث) در تمام نقاط منفی باشد.

answer

۹- (تمرین کتاب) مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۳ & x\geq ۱ \\ ۲x & x<۱ \end{cases}$ را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید.

answer

۱۰- (تمرین کتاب) اگر $f(x)=\left|x^{۲}-۴\right|$ ، به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاطی به طول‌های ۲ و ۲- بررسی کنید.

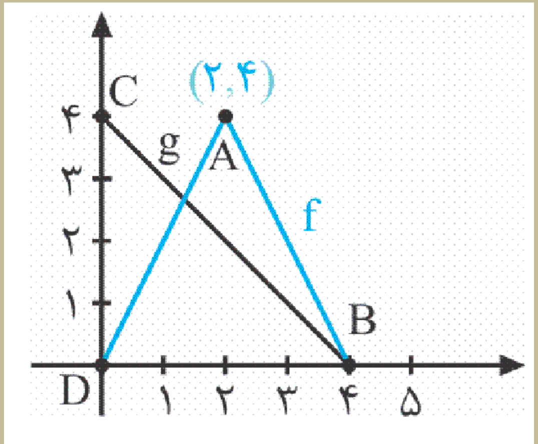
answer

۱۲- (تمرین کتاب) اگر $f'(۱) = ۳$ و $g'(۱) = ۵$ مطلوب است، $(f + g)'(۱)$ و $(۳f + ۲g)'(۱)$.

answer

۱۳- (تمرین کتاب) نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

اگر $h(x)=f(x).g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$ و $h'(۲)$ ، $h'(۳)$.



۱۴- (تمرین کتاب) اگر $f(x)=\begin{cases} x^{2} & x\le 0 \\ x & x>0 \end{cases}$ ، نشان دهید $f'_{+}(0)$ و $f'_{-}(0)$ موجودند ولی مشتق موجود نیست.

answer

۱۵- (تمرین کتاب) مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x) = (\sqrt{۳x+۲})(x^{۳}+۱)$

answer

ب) $f(x) = \frac{x^٢ - ٣x + ١}{-٣x + ٢}$

answer

۱۷- (تمرین کتاب) معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^{۲}-t+۱۰$ بر حسب متر در بازه زمانی $[۰,۵]$ داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[۰,۵]$ با هم برابرند؟

answer

۲۰- (تمرین کتاب) گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم

مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=40(1-\frac{t}{100})^2$ به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0,1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ می‌شود؟

مشتق توابع مثلثاتی:

۱ـ $\boxed{(\sin \Delta)' = \Delta' \cos \Delta}$

۲ـ $\boxed{(\cos \Delta)' = -\Delta' \sin \Delta}$

۳ـ $\boxed{(\tan \Delta)' = \Delta'(۱ + \tan^{۲} \Delta)}$

نکته: در کتاب درسی حرفی از مشتق تابع $\cot$ زده نشده! ما هم کاری بهش نداریم! فقط اگه تو امتحان

$\cot$ دیدی نترس! به جاش بنویس $\frac{۱}{\tan}$ و بعد محاسبات مشتق رو انجام بده!

مثال) (کار در کلاس) مشتق توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sin x . \tan x$

answer

ب) $g(x) = \frac{۵\cos x}{۱ - \sin x}$

answer

پ) $h(x) = \cos^{۳} x$

answer

(تمرین کتاب) مشتق توابع مثلثاتی زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \sin^{۳} x + \cos^{۲} x$$

answer

ب) $f(x) = \tan^{۲}(x) - ۲\cos(x)$

answer

پ) $f(x)=\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}$

answer

ت) $f(x) = \sin x \cos ٢x$

answer

فصل ۵ :

کاربرد مشتق

آزمون یکنوایی توابع

برای تابع مشتق‌پذیر f داریم:

الف) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیدا صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیدا نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

مثال: (مثال کتاب) تابع $f(x)=x^{3}-3x$ در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید است؟

answer

اکسترمم‌های نسبی توابع

نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی یک تابع را نقاط اکسترمم نسبی آن تابع می‌گویند.

ماکزیمم نسبی: نقطه $A \in D_f$ ، نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است، هرگاه یک همسایگی اطراف A وجود داشته باشد، به طوری که عرض A از عرض تمام نقاط همسایگی بیشتر یا مساوی باشد. مقدار ماکزیمم نسبی، همان مقدار عرض این نقطه است.

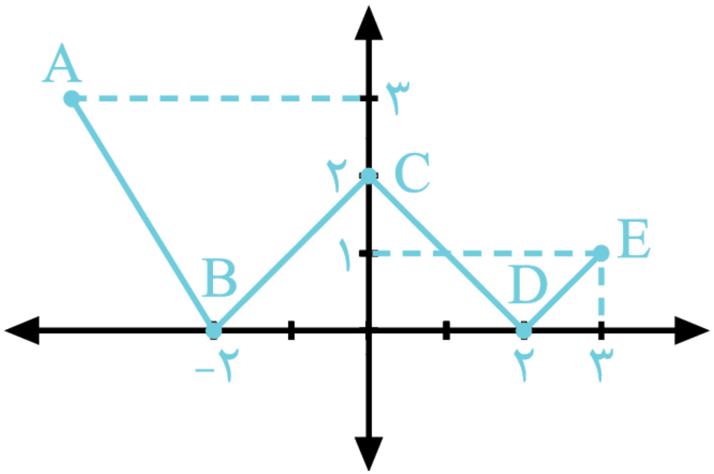
مینیمم نسبی: نقطه $A \in D_f$ نقطه مینیمم نسبی تابع f است، هرگاه یک همسایگی اطراف A وجود داشته باشد، به طوری که عرض A از عرض نقاط همسایگی کمتر یا مساوی باشد. مقدار ماکزیمم نسبی، همان مقدار عرض این نقطه است.

نکته: وجود همسایگی (هم چپ، هم راست) برای این که یک نقطه اکسترمم نسبی شود، شرطی لازم است. (یعنی مثلا نقاط ابتدا و انتهای یک بازه هیچ وقت نمی‌تونن اکسترمم نسبی بشن)

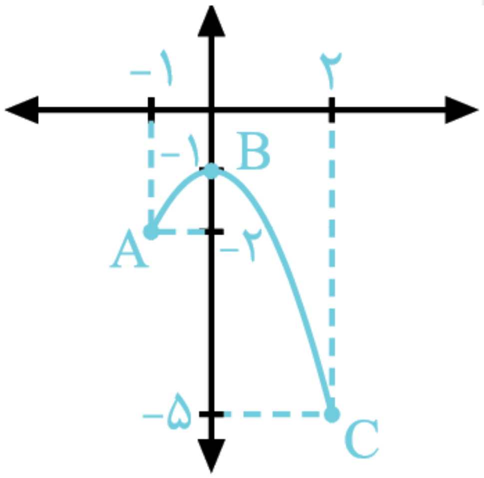
نکته: برای اکسترمم نسبی شدن یک نقطه، نه پیوستگی اهمیت دارد نه مشتق‌پذیری!

مثال: (کار در کلاس) برای نقاط مشخص شده در هر یک از توابع زیر، نوع اکسترمم نسبی، مقدار اکسترمم نسبی و مقدار مشتق را در آن نقطه محاسبه کنید.

الف) $f(x)=\left||x|-۲\right|; x\in[-۵,۳]$



ب) $g(x) = -x^{۲} - ۱; x \in [-۱,۲]$



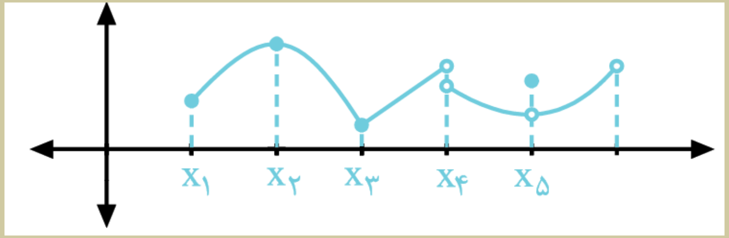
answer

نکته: نقاط روی توابع ثابت (به شرط وجود همسایگی) هم maxنسبی به حساب می‌آیند هم minنسبی.

نقطه بحرانی تابع

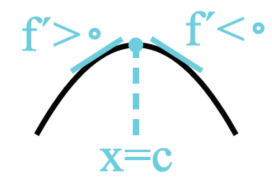
فرض کنید $c \in D_f$ در این صورت cیک نقطه بحرانی fاست، هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مثال: کدام یک از نقاط مشخص شده در نمودار زیر بحرانی‌اند، کدام نیستند؟ (با ذکر دلیل)



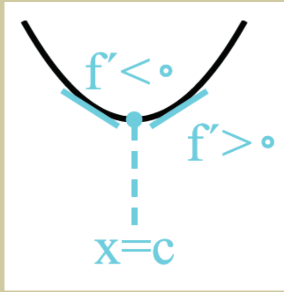
قضیه فِرما: اگر تابع f در نقطه‌ای به طول c اکسترمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c)=0$ است.

نتیجه: هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی f، حتما بحرانی نیز هست، اما هر نقطه‌ی بحرانی، اکسترمم نسبی نیست.



آزمون مشتق اول

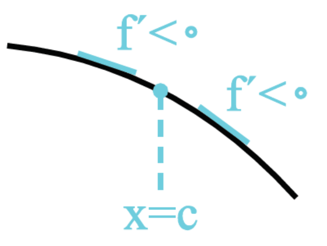
الف) اگر علامت f' قبل از $x=c$ مثبت و بعد از آن منفی باشد، آنگاه **c** طول max نسبی **f** است.



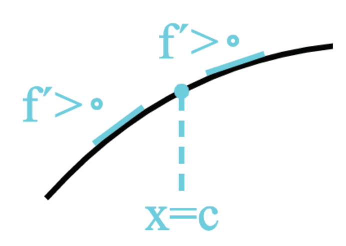
ب) اگر علامت f' قبل از $x=c$ منفی و بعد از آن مثبت باشد، آنگاه

c طول min نسبی **f** است.

پ) اگر علامت f' قبل و بعد از $x=c$ تغییر نکند، آنگاه **c**، نه طول min نسبی **f** است نه طول max نسبی آن.



یا



مثال: با استفاده از آزمون مشتق اول، نقاط اکسترمم نسبی و مقادیر آن‌ها را برای تابع $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۱۲x - ۱$ به دست آورید.

answer

اکسترمم مطلق توابع

به $\max$ و $\min$ مطلق توابع، اکسترمم مطلق آن‌ها می‌گوییم.

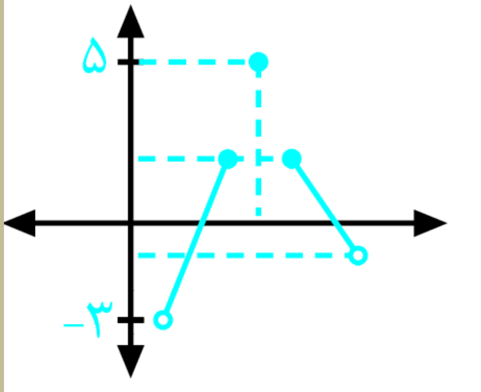
ماکزیمم مطلق: با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c, f(c))$ یک نقطه $\max$ مطلق برای تابع f است، هرگاه عرض این نقطه از عرض تمام نقاط دامنه f بیشتر یا مساوی باشد. مقدار $\max$ مطلق همان مقدار عرض این نقطه، یعنی $f(c)$ است.

مینیمم مطلق: با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c,f(c))$ یک نقطه $\min$ مطلق برای تابع **f** است، هرگاه عرض این نقطه از عرض تمام نقاط دامنه **f** کمتر یا مساوی باشد. مقدار $\min$ مطلق همان مقدار عرض این نقطه یعنی $f(c)$ است.

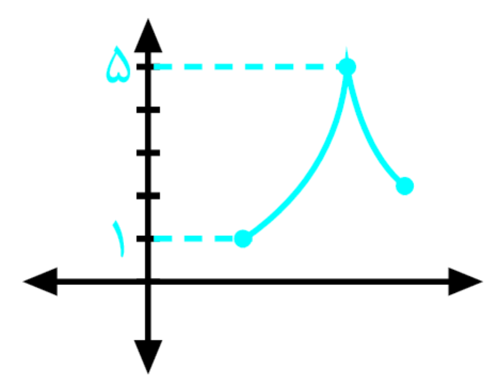
نکته: وجود همسایگی برای این که یک نقطه اکسترمم مطلق شود، نه شرط لازم است نه کافی! یعنی اصلا وجود همسایگی این جا مهم نیست! برخلاف اکسترمم‌های نسبی که وجود همسایگی واسشون شرط لازم بودن.

مثال: در هر مورد از نمودارهای زیر، مقادیر و مطلق را بیابید.

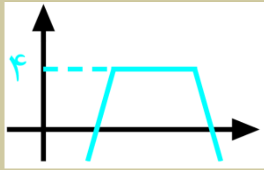
الف



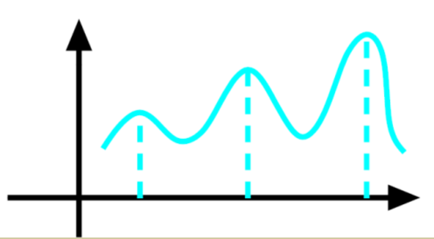
ب)



نکته: یک تابع می‌تواند در بی‌نهایت نقطه دارای اکسترمم مطلق باشد، اما مقدار آن‌ها یکتاست.

مانند 

که بی‌شمار نقطه max مطلقند و مقدار آن‌ها ۴ است. اما یک تابع می‌تواند بی‌شمار نقطه اکسترمم نسبی با مقادیر مختلف داشته باشد. مانند



قضیه: فرض کنید f در $[a,b]$ پیوسته باشد. در این صورت در این بازه هم max مطلق دارد هم مطلق.

مثال (فعالیت کتاب) آیا تابع $y=\left|x^{۲}-۱\right|$ در $[-۲,۳]$ دارای اکسترمم مطلق است؟ در صورت وجود با رسم نمودار مقادیر آن‌ها را بیابید.

answer

روش محاسبه اکسترمم‌های مطلق تابع f در بازه بسته $[a,b]$

گام اول: مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی f را می‌یابیم.

گام دوم: مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی محاسبه می‌کنیم.

گام سوم: در گام دوم، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار $\max$ مطلق و کوچک‌ترین آن‌ها، $\min$ مطلق.

مثال: (مثال کتاب) نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = ۲x^۳ + ۳x^۲ - ۱۲x$ را در بازه $[-۱,۳]$ تعیین کنید.

بهینه‌سازی یا optimization

یعنی پیدا کردنِ بهترین حالت! مثلِ کمترین مقدار برای زمان، هزینه، فاصله یا بیشترین مقدار برای سود مساحت یا حجم! مسائل بهینه‌سازی معمولا با بیانِ فارسی و کلمات کمترین یا بیشترین همراهند!

روش حل مسائل بهینه‌سازی با استفاده از رمز نُفتم !!

۱ نَ : نمادگذاری رسم شکل(در صورت نیاز) و قرار دادن معلوم‌ها و نمادهای مجهولات ← y و x

۲ ف : f ضابطه‌ی تابعی که قرار است بهینه شود را بنویسید!

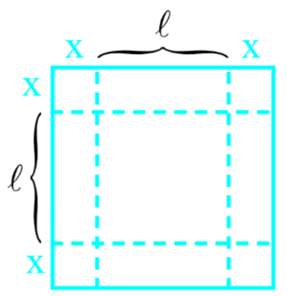
۳ ت : تک‌متغیرش کن! اگه اِف دومتغیره بود، تک‌متغیرش کن!(با استفاده از یه رابطه از دل سوال!)

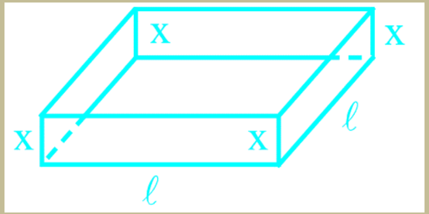
۴ م : max–min عرض اکسترمم(حالا یا ماکزیمم یا مینیمم) تابع تک‌متغیره رو بدست بیارا!

مثال: (مثال کتاب) نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن با هم برابر باشند.

answer

مثال (مثال کتاب) مطابق شکل، ورقی فلزی به طول ۳۰cm را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از ۴ گوشه آن مربع‌هایی کوچک به ضلع X را برش بزنیم و سپس با تا کردن ورق در امتداد خطچین‌ها، جعبه‌ای در باز بسازیم. مقدار X چقدر باشد تا حجم قوطی حداکثر شود؟





۱- (تمرین کتاب) بزرگ‌ترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x) = x^{3} - 12x + 4$ در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟ چرا؟

answer

۲- (تمرین کتاب) با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x)=\frac{۱}{x^{۲}+۱}$ ، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید است؟

answer

۳- (تمرین کتاب) نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{۴-x^{۲}}$

answer

ب) $g(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} - ۴$

answer

پ) $h(x) = \sqrt[۳]{x}$

answer

۴- (تمرین کتاب) در تابع زیر ابتدا نقاط بحرانی را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$$f(x)=x^{۳}+۳x^{۲}-۹x-۱۰$$

answer

۵- (تمرین کتاب) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع زیر را در بازه‌های مشخص شده، در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x) = -۲x^۳ + ۹x^۲ - ۱۳ \quad ; \quad x \in [-۱,۲]$$

answer

۶- (تمرین کتاب) اگر نقطه $(۲,۱)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^۳ + bx^۲ + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

answer

۸- (تمرین کتاب) الف) می‌خواهیم کنار رودخانه، یک محوطه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟ ب) بدون استفاده از مشتق نیز، این مساله را حل کنید.

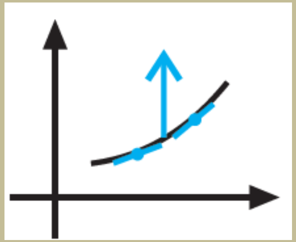
answer

۹- (تمرین کتاب) هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت۳۲ خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایین هر صفحه۲ و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

answer

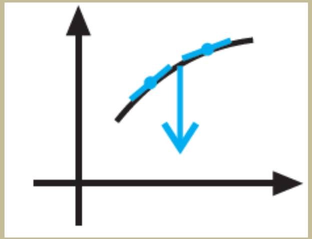
جهت تقعر

اگر مماس‌های مرسوم بر نمودار f، زیر نمودارش قرار بگیرند، جهت تقعر f رو به بالاست. مانند



و اگر بالای نمودار قرار بگیرند، جهت تقعر رو به پایین است.

مانند:



تشخیص جهت تقعر با محاسبات

در بازه‌های نظیر I که f'' در تمام نقاط آن موجود باشد، داریم:

۱- اگر در این بازه $f''>0$ ، جهت تقعر نمودار f در I رو به بالا است.

۲- اگر در این بازه $f''<0$ ، جهت تقعر نمودار f در I رو به پایین است.

۳- در حالتی که $f''(x)=0$ ، آزمون بی‌نتیجه است.

مثال) (مثال کتاب) جهت تقعر توابع زیر را در دامنه تعریفشان به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{۱}{x}$

answer

ب) $g(x) = x^{٣} + ٣x^{٢} + ١$

answer

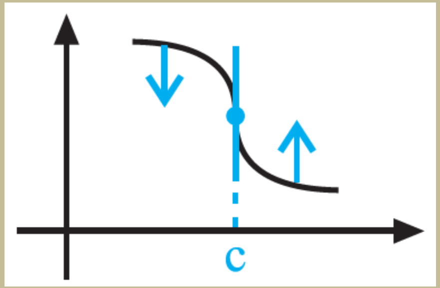
نقطه عطف نمودار یک تابع

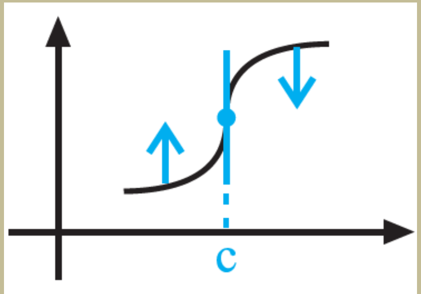
فرض کنید f در نقطه $x=c$ پیوسته است. در این صورت نقطه $(c,f(c))$ نقطه عطف تابع f است، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

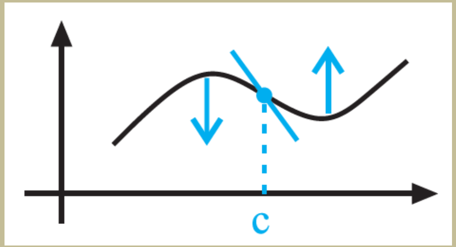
الف) نمودار f در نقطه $(c,f(c))$ خط مماس داشته باشد.

ب) جهت تقعر f در $(c,f(c))$ تغییر کند.

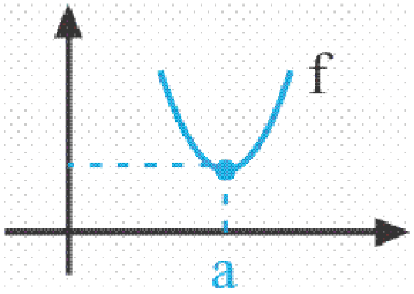
کارت زرد: راجع به شرط الف بگوییم، وجود خط مماس در $x = c$ ، یعنی این که یا تابع آن جا مشتق‌پذیر باشد، یا در حالت عدم وجود مشتق، مشتق چپ و راست، هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ شوند. در این حالت مشتق موجود نیست، اما خط مماس موجود است، آن هم مماس قائم! در ۳ مثال زیر، نقاط عطف را دنبال کنید.

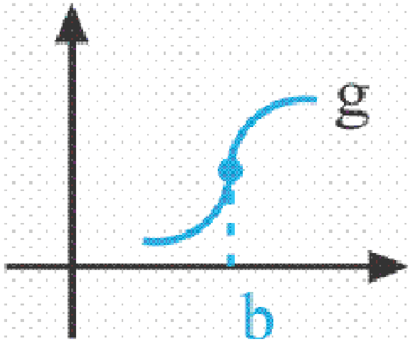


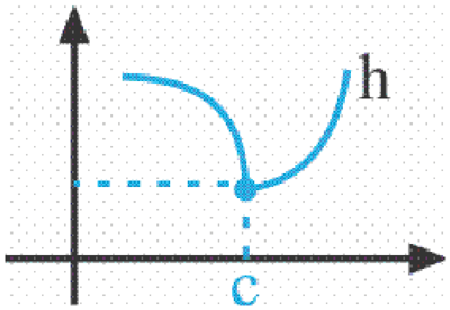




مثال) (مثال کتاب) در هر یک از نمودارهای زیر، نقطه عطف را در صورت وجود، مشخص و خط مماس بر منحنی را رسم کنید







مثال) (مثال کتاب) جهت تقعر نمودار تابع زیر را مشخص کنید و نقاط عطف آن‌ها را به دست آورید.

الف) $f(x) = x^{۳} - ۶x^{۲} + ۱۵$

ب) $f(x) = \sqrt[۳]{x}$

answer

رسم نمودار توابع

۱- دامنه تابع را به دست می‌آوریم.

۲- محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم. (در صورت وجود)

۳- f' را به دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن، بازه‌هایی که **f** در آن‌ها صعودی یا نزولی است را مشخص می‌کنیم.

۴- نقاط بحرانی و اکسترمم‌های نسبی تابع را می‌یابیم. (در صورت وجود)

۵- f'' را به دست آورده و با تعیین علامت آن، جهت تقعر تابع در بازه‌های مختلف را مشخص می‌کنیم.

۶- نقطه عطف را می‌یابیم. (در صورت وجود)

۷- بررسی رفتار تابع در بی‌نهایت (در صورت وجود)

۸- معادله مجانب‌های تابع را به دست می‌آوریم. (در صورت وجود)

۹- در صورت نیاز از نقاط کمکی هم استفاده می‌کنیم.

حالا جدول رفتار تابع (متشکل از **f** و f' و f'') را تشکیل داده و بعد نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

مثال (مثال کتاب) نمودار تابع زیر را رسم کنید.

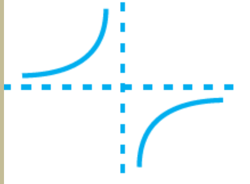
$$f(x) = x^{۳}$$

$$f(x) = (x-۱)^{۲}(x+۳)$$

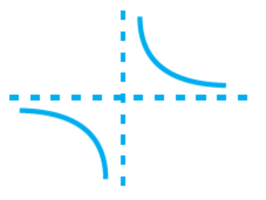
answer

تابع هموگرافیک

تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ که $c\neq 0$ را یک تابع هموگرافیک می‌گوییم. این تابع دارای یک مجانب قائم به معادله $x=-\frac{d}{c}$ (ریشه مخرج) و یک مجانب افقی به معادله $y=\frac{a}{c}$ (نسبت ضرایب **X**ها) است. شکل کلی آن به دو صورت



(شاخک‌ها صعودی) یا



(شاخک‌ها نزولی) است.

نکته: شرط $c \neq 0$ خیلی مهمه ها! چون اگه $c = 0$ باشه، یک تابع خطی به معادله $y = \frac{ax + b}{d}$ داریم

که دیگه تابع هموگرافیک نیست! یک خطه.

نکته: در شرایطی که $c \neq 0$ و $ad = bc$ ، این تابع به یک تابع ثابت به معادله $y = \frac{a}{c}$ که $x \neq -\frac{d}{c}$

تبدیل میشود.

مثال) (مثال کتاب) جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\frac{3x+4}{-2x+1}$ را رسم کنید.

answer

۱۲- (تمرین کتاب) نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a جهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطه‌ی عطف نباشد.

answer

۱۳- (تمرین کتاب) جهت تقعر توابع زیر را در دامنه‌ی آن‌ها بررسی کرده و نقطه‌ی عطف آن‌ها را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۳x+۴$

answer

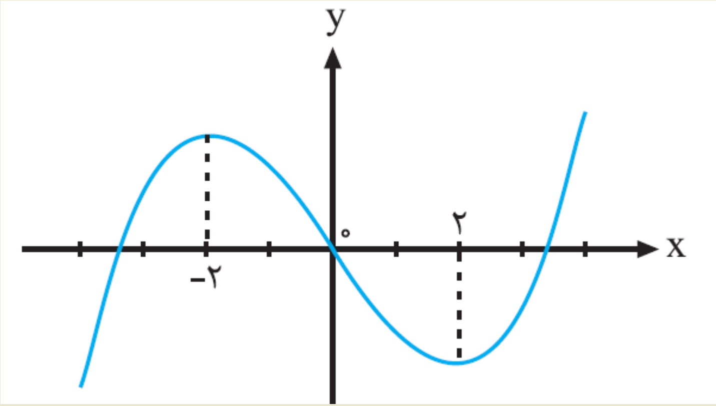
ب) $f(x) = \frac{x+١}{x-١}$

answer

(پ $f(x)=\sqrt[۳]{x+۱}$

answer

۱۵- (تمرین کتاب) اگر $(۰,۰)$ نقطه عطف تابع درجه سومی با ضابطه $y = x^{۳} + ax^{۲} + bx + c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، c » b, a را بیابید.



answer

۱۷– (تمرین کتاب) فرض کنید $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ و محل تقاطع مجانب‌های آن نقطه $(2,1)$ است. اگر این تابع از نقطه‌ی (۰ , ۱–) بگذرد، ضابطه‌ی تابع را به دست آورید.

answer

۱۸- (تمرین کتاب) کدام یک از نمودارهای زیر مربوط به $f(x) = x^{۳} + x - ۲$ است؟